В. А. ГУСЕВ А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

В. А. ГУСЕВ А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

КНИГА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

2-е издание

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА
АНАЛИЗА

ГЕОМЕТРИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1990

ББК 22.1я2я72
Г96

Рецензенты:

учитель-методист школы № 420 Москвы Б. П. Пигарев;
кандидат физико-математических наук,
доцент МГУ О. С. Ивашев-Мусатов

Раздел «Алгебра и начала анализа» написан А. Г. Мордковичем,
раздел «Геометрия» написан Б. А. Гусевым

Гусев В. А., Мордкович А. Г.

Г96 Математика: Справ. материалы: Кн. для учащихся.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1990.— 416 с.: ил.— ISBN 5-09-002693-9

В книге дано краткое изложение основных разделов школьных курсов алгебры и начал анализа, геометрии. Книга окажет помощь в систематизации и обобщении знаний по математике. Предыдущее издание вышло в 1988 году.

Г $\frac{4306030000-418}{103(03)-90}$ 222—90 ББК 22.1я2я72

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович
Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

Зав. редакцией Р. А. Хабиб
Редактор Л. Н. Белоновская
Младший редактор Е. А. Буюклян
Художники Б. Л. Николаев,
Б. В. Костин
Художественный редактор
Е. Р. Дашук
Технический редактор И. Ю. Щукина
Корректоры Т. С. Крылова, Е. В. Мамитова

ИБ № 12625

Подписано к печати с диапозитивов 20.02.90. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. типографская № 1. Гарнит. школьн. Печать высокая. Усл. печ. л. 26+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 26,69. Уч.-изд. л. 21,84+0,42 форз. Тираж 1 000 000 экз. Заказ 769. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-002693-9

© Гусев В. А., Мордкович А. Г., 1988

СЛОВО К УЧАЩИМСЯ

1. Что представляет собой этот справочник?

Б справочнике вы найдете основной материал всех разделов школьного курса математики: математические понятия, определения, аксиомы, теоремы, свойства и т. д. Кроме этого, в справочнике имеется много подробно разобранных задач и примеров, но заметим, что в их решении используется иногда не только материал того пункта, к которому относится пример нли задача, но и материал из других разделов. Доказательств теорем в большинстве случаев нет — их можно найти в тех учебных пособиях, по которым вы учитесь или учились в младших классах; те же немногие доказательства, которые адесь приведены, мы даем потому, что либо нх нет в школьных учебных пособиях, либо мы приводим их как образцы тех или иных важных рассуждений.

В нашем справочнике весь матернал, относящийся к тому или иному понятию, помещен компактно, в одном разделе (в школьных пособиях это не всегда так). Это поможет вам быстро получить всю необходимую информацию об интересующем вас понятии.

В некоторых пунктах справочника мы даем дополнительный материал, не входящий в программу курса математики средней школы,— этот материал расширит ваши представления о иекоторых известных вам понятиях. Такие пункты отмечены знаком *.

2. Зачем иужен справочник по математике?

Справочник поможет вам:

1) найти нужную информацию о том или ином понятии, о той или иной теореме из школьного курса математики;

2) повторить соответствующий материал при подготовке к уроку, к контрольной работе, к экзамену;

3) вспомнить, как решаются типовые задачи и примеры школьного курса математики;

4) подготовиться к вступительному экзамену или собеседованию по математике при поступлении в вуз, техникум и другие учебные заведения.

3. Как пользоваться справочником?

Справочник состоит из трех частей: часть I — алгебра и начала анализа, часть II — геометрия, часть III — приложения (основные формулы и соотношения, предметный указатель). Внутри первых двух частей материал изложен по главам: 7 глав по алгебре и началам анализа и 6 глав по геометрии. Главы разбиты на параграфы, параграфы — на довольно мелкие пункты (так вам будет удобнее отыскать нужную информацию): 230 пунктов по алгебре и началам анализа и 84 пункта по геометрии. Нумерация глав, параграфов и пунктов своя в каждой части.

Необходимую вам информацию следует искать так: конкретное понятие удобно искать по предметному указателю, конкретный раздел курса — по оглавлению.

Приведем примеры использования предметного указателя. Пусть вам понадобилось найти определение дробной части числа. В предметном указателе среди слов, начинающихся на букву «Д», вы находите: дробная часть числа — 39 (это значит, что соответствующее определение помещено на странице 39). Еще один пример: вам нужно найти определение бесконечной десятичной периодической дроби. Дроби бывают разных типов, все они помещены в предметном указателе ниже слова «дробь». Там, в частности, вы найдете:

Дробь
— десятичная 22
— — бесконечная 27
— — — пернодическая 28

Это значит, что интересующее вас понятие вы найдете на с. 28.

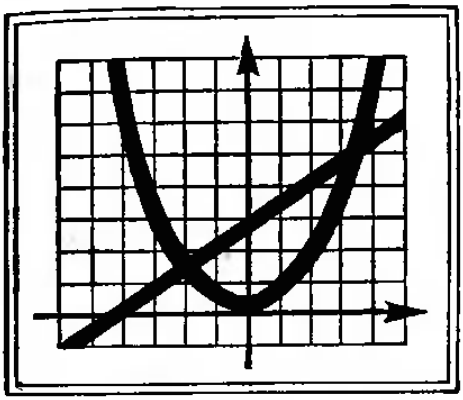
Аналогично термин «рациональное выражение» вы найдете в алфавитном указателе под рубрикой «Выражение», «прямой угол» — под рубрикой «Угол», «свойства модулей» — под рубрикой «Свойства» и т. д.

Если вы будете читать тот или иной пункт с начала до конца, то внутри текста вы тоже иногда найдете ссылки на номера страниц или пунктов, где вводится понятие, используемое в этом пункте. Для удобства номера аксиом и теорем выделены в тексте. Аксиомы геометрии пронумерованы в соответствии с нумерацией, принятой в пособии А. Б. Погорелова «Геометрия, 6—10». Теоремы в справочнике нумеруются так: Т.5.3 — это значит, что речь идет о теореме 3 из главы 5.

Мы надеемся, что справочник станет вашим добрым помощником, и желаем вам успехов!

Авторы

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



ГЛАВА I. ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел 11
2. Арифметические действия над натуральными числами —
3. Деление с остатком . . . 12
4. Признаки делимости . . 13
5. Разложение натурального числа на простые множители 14
6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел 15
7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел 16
8. Употребление букв в алгебре. Переменные 17

§ 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа . . . 17
10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей 18
11. Приведение дробей к общему знаменателю 19
12. Арифметические действия над обыкновенными дробями 20
13. Десятичные дроби . . . 22
14. Арифметические действия над десятичными дробями 24
15. Проценты 26
16. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь . . 27
17.* Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь 28
18. Координатная прямая . . 30
19. Множество рациональных чисел 31

§ 3. Действительные числа

20. Иррациональные числа . . 31
21. Действительные числа. Числовая прямая 32
22. Обозначения некоторых числовых множеств 33
23. Сравнение действительных чисел . . . . . —
24. Свойства числовых неравенств 34
25. Числовые промежутки . . 35
26. Модуль действительного числа 36
27. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой 37
28. Правила действий над действительными числами . . —
29. Свойства арифметических действий над действительными числами 38

30. Пропорции 38
31. Целая часть числа. Дробная часть числа 39
32. Степень с натуральным показателем . . . . . —
33. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем . . —
34. Стандартный вид положительного действительного числа 40
35. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней . . . . —
36. Корень нечетной степени из отрицательного числа . . 41
37. Степень с дробным показателем 42
38. Свойства степеней с рациональными показателями . . —
39. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности . . . 43
40. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку . . 44
41.* Правило извлечения квадратного корня из натурального числа 45
42. Понятие о степени с иррациональным показателем . . 47
43. Свойства степеней с действительными показателями . . —

§ 4. Комплексные числа

44. Понятие о комплексном числе 47
45. Арифметические операции над комплексными числами 48
46. Алгебраическая форма комплексного числа 49
47. Отыскание комплексных корней уравнений 52

ГЛАВА II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Основные понятия

48. Виды алгебраических выражений 53
49. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения . . . . . —
50. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество 54

§ 6. Целые рациональные выражения

51. Одночлены и операции над ними 55
52. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду 56
53. Формулы сокращенного умножения 57
54. Разложение многочленов на множители 58
55. Многочлены от одной переменной 60
56. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители . . . . . —
57. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$ 61
58. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона) . . . . . —

§ 7. Дробные рациональные выражения

59. Рациональная дробь и ее основное свойство 62
60. Сокращение рациональных дробей 63
61. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю . . . . . —
62. Сложение и вычитание рациональных дробей 64
63. Умножение и деление рациональных дробей 65
64. Возведение рациональной дроби в целую степень . . 66
65. Преобразование рациональных выражений 67

§ 8. Иррациональные выражения

66. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов) 68
67. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$ . . . 69
68. Преобразование иррациональных выражений . . 70

ГЛАВА III. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 9. Свойства функций

69. Определение функции . . 71
70. Аналитическое задание функции . . . . . —
71. Табличное задание функции 73

72. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат 73
73. График функции, заданной аналитически . . . . . —
74. Четные и нечетные функции 75
75. График четной функции. График нечетной функции . . 76
76. Периодические функции . . 77
77. Монотонные функции . . —

§ 10. Виды функций

73. Постоянная функция . . . 78
79. Прямая пропорциональность —
80. Линейная функция . . . 80
81. Взаимное расположение графиков линейных функций 82
82. Обратная пропорциональность . . . . . —
83. Функция $y=x^2$ 84
84. Функция $y=x^3$ . . . . —
85. Степенная функция с натуральным показателем . . —
86. Степенная функция с целым отрицательным показателем 85
37. Функция $y=\sqrt{x}$ 86
83. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ 37
39. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ . . . . —
90. Степенная функция с положительным дробным показателем 83
91. Степенная функция с отрицательным дробным показателем . . . . . —
92. Функция $y=[x]$ 39
93. Функция $y=\{x\}$ . . . . —
94. Показательная функция . . 90
95. Обратная функция. График обратной функции . . . 91
96. Логарифмическая функция 93
97. Число e. Функция $y=e^x$. Функция $y=\ln x$ 94
98. Определение тригонометрических функций 95
99. Знаки тригонометрических функций по четвертям . . 96
100. Исследование тригонометрических функций на четность, нечетность 97
101. Периодичность тригонометрических функций . . . —
102. Свойства и графни функции $y=\sin x$ 98
103. Свойства и график функции $y=\cos x$ 99
104. Свойства и график функции $y=\operatorname{tg} x$ 100
105. Свойства и график функции $y=\operatorname{ctg} x$ 100
106.* Функция $y=\arcsin x$ . . —
107.* Функция $y=\arccos x$ . . 102
106.* Функция $y=\operatorname{arctg} x$ . . 103
109.* Функция $y=\operatorname{arcctg} x$ . . 104

§ 11. Преобразования графиков

110. Построение графика функции $y=mf(x)$ 105
111. Графики функций $y=ax^2$, $y=ax^3$ 107
112. Построение графика функции $y=f(x-m)+n$ . . . —
113. График квадратичной функции 108
114. Способы построения графика квадратичной функции 109
115. Построение графика функции $y=f(kx)$ 111
116. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций 113
117. График гармонического колебания $y=A\sin(\omega x+\alpha)$ 114

ГЛАВА IV. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 12. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

118. Понятие трансцендентного выражения 116
119. Определение логарифма положительного числа по данному основанию . . . 117
120. Свойства логарифмов . . —
121. Переход к новому основанию логарифма 118
122. Логарифмирование и потенцирование 119
123. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма . . 120

§ 13. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

124. Тригонометрические выражения 121
125. Формулы сложения и вычитания аргументов . . —
126. Формулы приведения . . 123
127. Соотношения между тригонометрическими функция-

ми одного и того же аргумента 123
128. Формулы двойного угла . 125
129. Формулы понижения степени 126
130. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение 127
131. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму . . . 128
182.* Преобразование выражения $a\cos t+b\sin t$ к виду $A\sin(t+\alpha)$ . . . . . —
188.* Примеры преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции 129

ГЛАВА V. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 14. Уравнения с одной переменной

134. Определение уравнения. Корни уравнения . . . 131
135. Равносильность уравнений —
136. Линейные уравнения . . 132
137. Квадратные уравнения . . 133
138. Неполные квадратные уравнения 134
139. Теорема Виета . . . . . —
140. Системы и совокупности уравнений 135
141. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля 136
142. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни . 137
143. Уравнения с переменной в знаменателе 138
144. Область определения уравнения 139
145. Рациональные уравнения . 141
146. Решение уравнения $p(x)=0$ методом разложения его левой части на множители . —
147. Решение уравнений методом введения новой переменной 142
148. Биквадратные уравнения 143
149. Решение задач с помощью составления уравнений . . —
150. Иррациональные уравнения 147
151. Показательные уравнения 149
152. Логарифмические уравнения . . . . . —
153. Примеры решения показательно-логарифмических уравнений 151
154. Простейшие тригонометрические уравнения . . . 152
155. Методы решения тригонометрических уравнений . 153
156.* Универсальная подстановка (для тригонометрических уравнений) 156
157.* Метод введения вспомогательного аргумента (для тригонометрических уравнений) 157
158. Графическое решение уравнений 158
159.* Уравнения с параметром . 160

§ 15. Уравнения с двумя переменными

160. Решение уравнения с двумя переменными 168
161. График уравнения с двумя переменными . . . . —
162. Линейное уравнение с двумя переменными и его график . . . . . —

§ 16. Системы уравнений

163. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы . . . 164
164. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки . . 166
165. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения . . . —
166. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых перамменных 167
167. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными 169
168. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными . . . 170
169.* Решение систем двух уравнений с двумя переменными методами умножения и деления 171
170. Системы показательных и логарифмических уравнений 173
171.* Системы тригонометрических уравнений с двумя переменными . . . . . —
172. Системы трех уравнений с тремя переменными . . . 175

173. Решение задач с помощью составления систем уравнений 176

ГЛАВА VI. НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Решение неравенств с переменной

174. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной . . . 178
175. Графическое решение неравенств с одной переменной 179
176. Линейные неравенства с одной переменной . . . . —
177. Системы неравенств с одной переменной 180
178. Совокупность неравенств с одной неременной . . . 181
179. Дробно-линейные неравенства 182
180. Неравенства второй степени 183
181. Графическое решение неравенств второй степени . . 185
182. Неравенства с модулями . 187
183. Решение рациональных неравенств методом промежутков 189
184. Показательные неравенства 191
185. Логарифмическне неравенства . . . . . —
186.* Иррациональные неравенства 193
187. Решение тригонометрических неравенств 195
188. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными 196

§ 18. Доказательство неравенств

189. Метод оценки знака разности 199
190. Синтетический метод доказательства неравенств . . —
191. Доказательство неравенств методом от противного . . 200
192.* Использование неравенств при решении уравнений . 201

ГЛАВА VII. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 19. Числовые последовательности

193. Определение последовательности 201
194. Способы задания последовательности 202
195. Возрастание и убывание последовательности . . . —
196. Определение арифметической прогрессни 203
197. Свойства арифметической прогрессии 204
198. Определение геометрической прогрессии 205
199. Свойства геометрической прогрессии 206
200. Поиятие о пределе последовательности 207
201. Вычисление пределов последовательностей 209
202. Сумма бескоиечной геометрической прогрессии при $|q|<1$ 210

§ 20. Предел функции

203. Предел функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$. Горизоитальная асимптота 211
204. Вычисление пределов функций при $x\to\infty$ 213
205. Предел функции в точке. Непрерывные функции . . 214
206. Вертикальная асимптота . 215
207. Вычисление пределов функций в точке 216

§ 21. Производная и ее применения

208. Приращение аргумента. Приращение функции . . . 218
209. Определение производной . —
210. Формулы дифференцирования. Таблица производных 220
211. Дифференцирование суммы, произведения, частного . . —
212. Сложная функция и ее дифференцирозание . . . 221
213. Физический смысл производной 222
214. Вторая производная и ее физический смысл 223
215. Касательная к графику функции . . . . . —
216. Применение производной к исследованию функций на монотонность 226
217. Применение производной к исследованию функций на экстремум 228
218. Отыскание наибольшего и

наименьшего значений непрерывной функции на отрезке 231
219.* Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке . 232
220. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин . . . 234
221. Применение производной для доказательства тождеств 287
222. Применение производной для доказательстза неравенств 238
223. Общая схема построения графика функции . . . 239

§ 22. Первообразная и интеграл

224. Первообразная 243
225. Таблица первообразных . . —
226. Правила нычисления первообразных 244
227. Интеграл 246
228. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона—Лейбница) . . 248
229. Правила вычисления интегралов . . . . . —
280. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур 249

ГЛАВА I. ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , используюшиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е. $2457=2\cdot1000+4\cdot100+5\cdot10+7$.

Вообще если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц, то имеем $a\cdot1000+b\cdot100+c\times\times10+d$. Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел a, b, c, d). Аналогично запись $\overline{abcde}$ означает число

$$a\cdot10\,000+b\cdot1000+c\cdot100+d\cdot10+e,$$ причем $a\neq0$.

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p=m+n$ тоже натуральное число, m и n — *слагаемые*, p — *сумма*; $p=mn$ тоже натуральное число, m, n — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1^0. $a+b=b+a$ (*переместительное* свойство сложения).

2^0. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*сочетательное* свойство сложения).

3^0. $ab=ba$ (*переместительное* свойство умножения).

4^0. $(ab)c=a(bc)$ (*сочетательное* свойство умножения).

5^0. $a(b+c)=ab+ac$ (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например, $7-4=3$ — натуральное число, тогда как $4-7=-3$ — не натуральное число; $21:7=3$ — натуральное число, тогда как $11:2=5{,}5$ — не натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то при $m-n=k$ говорят, что m — *уменьшаемое*, n — *вычитаемое*, k — *разность*; при $m:n=k$ говорят, что m — *делимое*, n — *делитель*, k — *частное*, число m называют также *кратным* числа n, а число n — *делителем* числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k, такое, что $m=kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется *значением выражения*.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: сначала выполняются действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28\cdot 93+(1927-1873)\cdot 31):6-710,$$

то порядок действий таков:

$$(28\overset{1}{\cdot}93\overset{4}{+}(1927\overset{2}{-}1873)\overset{3}{\cdot}31)\overset{5}{:}6\overset{6}{-}710.$$

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m=nk$, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43=18\cdot 2+7$. В общем случае *если* m — *делимое*, n — *делитель* $(m>n)$, p — *частное* и r — *остаток*, то

$$m=np+r, \qquad (1)$$

где $r<n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r=0$). Например, если $n=3$, а $r=2$, то получаем $m=3p+2$. Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

Пример. Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

Решение. Выполним деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
36421 & 25 \\
\underline{25} & \overline{1456} \\
114 & \\
\underline{100} & \\
142 & \\
\underline{125} & \\
171 & \\
\underline{150} & \\
21 &
\end{array}$$

Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать: $36\,421 = 25 \cdot 1456 + 21$.

4. Признаки делимости. В некоторых случаях, не производя деления натурального числа m на натуральное число n, можно ответить на вопрос: выполнимо деление m на n без остатка или нет? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью различных признаков делимости.

Т.1.1. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число *(теорема о делимости суммы)*.

Не следует, однако, думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37 + 19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Заметим, однако, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Т.1.2. Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число *(теорема о делимости произведения)*.

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5, так как 105 делится на 5.

Т.1.3. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 *(признак делимости на 2)*.

Т.1.4. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 *(признак делимости на 5)*.

Т.1.5. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 *(признак делимости на 10)*.

Т.1.6. Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (*признак делимости на 4*).

Доказательство проведем для пятизначного числа $\overline{abcde}$. Имеем $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$. Так как 100, 1000 и 10 000 делятся на 4, то делится на 4 и сумма $10\,000a + 1000b + 100c$. Значит, если двузначное число $d \cdot 10 + e$ делится на 4, то и $\overline{abcde}$ делится на 4; если же $10d + e$ не делится на 4, то и $\overline{abcde}$ не делится на 4.

Например, число 15 436 делится на 4, так как число 36 делится на 4. Число 372 514 не делится на 4, так как 14 не делится на 4.

Т.1.7. | **Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (*признак делимости на* 3).**

Доказательство проведем для четырехзначного числа $\overline{abcd}$. Имеем $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=(999a+a)+(99b+b)+(9c+c)+d=$
$=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$.

Числа 9, 99, 999 делятся на 3, поэтому $999a+99b+9c$ делится на 3, и сумма $(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$ будет делиться на 8 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма цифр $a+b+c+d$.

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 сумма цифр этого числа $2+7+4+2=15$. Число 17 941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

Т.1.8. | **Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (*признак делимости на* 9).**

5. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно называется *простым;* если число имеет более двух делителей, то оно называется *составным.*

Так, число 19 простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом, не учитывая порядок сомножителей: $19=1\cdot 19$; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $35=1\cdot 35=5\cdot 7$.

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Т.1.9. | **Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и только одним способом.**

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для числа 360 эта запись будет выглядеть следующим образом:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают коротко: a^n, т. е. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n$.

Выражение a^n называют *степенью*, a — *основанием степени*, n — *показателем степени*.

Поэтому можно записать: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Выпишем все делители числа 96:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Все эти числа называют *общими делителями* чисел 72 и 96, а наибольшее среди них — *наибольшим общим делителем*.

Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается $D(a, b)$ (читается: «D от a, b»). Если числа a и b таковы, что $D(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

Например, взаимно простыми будут числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Пример 1. Найти $D(48, 60, 72)$.

Решение. $48 = 2^4 \cdot 3$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Значит, $D(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3$.

Ответ: $D(48, 60, 72) = 12$.

Пример 2. Найти D (3780, 7056).

Решение. Имеем:

3780	2	7056	2
1890	2	3528	2
945	3	1764	2
315	3	882	2
105	3	441	3
35	5	147	3
7	7	49	7
1		7	7
		1	

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad 7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

Тогда D (3780, 7056) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; взяты те простые миожители, которые входят и в разложение числа 3780, и в разложение числа 7056.

Ответ: D (3780, 7056) = 252.

7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем числа, кратные 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Выпишем числа, кратные 18:

18, 36, 54, 72, ...

Среди выписанных чнсел есть одинаковые:

36, 72, ...

Все эти числа называют *общими кратными* чисел 12 и 18, а наименьшее из них — число 36 — называют *наименьшим общим кратным* чисел 12, 18.

Аналогично определяется наименьшее общее кратное произвольных натуральных чисел a и b, оно обозначается К (a, b) (читается: «К от a, b»). Любое общее кратное чисел a и b делится на К (a, b).

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые миожители и найти произведение всех получивщихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Пример. Найти К (3780, 7056).

Решение. Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 6).

Тогда К (3780, 7056) $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056.

Итак, К (3780, 7056) = 105 840.

Для любых натуральных a и b справедливо равенство

$$D(a, b) \cdot K(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. $D(a, b) = 1$, то $K(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.*

8. Употребление букв в алгебре. Переменные. В алгебре часто конкретные свойства чисел записывают с помощью букв. Например, переместительное свойство сложения (от перемены мест слагаемых сумма не меняется) записывают так: $a + b = b + a$, где вместо a и b можно подставить любые числа: $3 + 5 = 5 + 3$; $100 + 3501 = 3501 + 100$ и т. д. Число, подставляемое вместо буквы, называют *ее значением.* В некоторых случаях (например, в уравнениях) вместо буквы можно подставить только определенные числа, чтобы написанное равенство было верным. Например, $7 + x = 10$ обращается в верное равенство лишь при $x = 3$. Употребляемые в алгебре буквы называют *переменными;* смысл такого названия состоит в том, что числовое значение буквы можно изменить: например, в равенстве $a + b = b + a$ можно положить $a = 3$, $b = 5$, а можно $a = 7$, $b = 19$ и т. д.— во всех случаях равенство будет верно. В равенстве $7 + x = 10$ можно положить $x = 3$, а можно $x = 5$; разница в том, что в первом случае числовое равенство будет верным, а во втором — неверным. Равенство $D(a, b) = 1$ (см. п. 6) верно при следующих значениях переменных a и b:

$$a = 18,\ b = 25;\quad a = 100,\ b = 99;\quad a = 13,\ b = 1000 \text{ и т. д.}$$

Это равенство неверно при следующих значениях переменных:

$$a = 8,\ b = 6;\quad a = 25,\ b = 150;\quad a = 7,\ b = 777 \text{ и т. д.}$$

§ 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. *Обыкновенная дробь* — это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, например $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8}$. Число m называется *числителем дроби,* n — *знаменателем.* В частности, может быть $n = 1$, в этом случае дробь имеет вид $\frac{m}{1}$, но чаще пишут просто m. Это означает, что *всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем* 1. Запись $\frac{m}{n}$ — другой вариант записи $m : n$.

Среди обыкновенных дробей различают правильные и непра-

вильные дроби. Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби (или в виде натурального числа, если дробь $\frac{m}{n}$ такова, что m кратно n, например $\frac{16}{4}=4$).

Пример. Представить неправильную дробь в виде суммы натурального числа и правильной дроби: а) $\frac{28}{5}$; б) $\frac{48}{13}$.

Решение. а) $\frac{28}{5}=\frac{25+3}{5}=\frac{25}{5}+\frac{3}{5}=5+\frac{3}{5}$;

б) $\frac{43}{13}=\frac{39+4}{13}=\frac{39}{13}+\frac{4}{13}=3+\frac{4}{13}$.

Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $5+\frac{3}{5}$ пишут $5\frac{3}{5}$, а вместо $3+\frac{4}{13}$ пишут $3\frac{4}{13}$. Число, записанное в таком виде, называется *смешанным числом*. Оно состоит из двух частей: целой и дробной. Так, для числа $3\frac{4}{13}$ целая часть равна 3, а дробная — $\frac{4}{13}$. Всякую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа (или в виде натурального числа). Верно и обратное: всякое смешанное или натуральное число можно записать в виде неправильной дроби. Например, $4\frac{1}{3}=$ $=4+\frac{1}{3}=\frac{12}{3}+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$. $3=\frac{3}{1}$.

10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются *равными*, если $ad=bc$. Например, равными будут дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{9}{15}$ (так как $3\cdot15=5\cdot9$), $\frac{12}{7}$ и $\frac{24}{14}$ (так как $12\cdot14=7\cdot24$).

Из определения равенства дробей следует, что равными будут дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$, так как $a\,(bm)=b\,(am)$,— здесь мы используем сочетательное и переместительное свойства умножения натуральных чисел (см. п. 2). Значит, $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, т. е. *если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на*

одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной. Это свойство называется *основным свойством дроби.*

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заменить данную дробь другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют *сокращением дроби.* Например, $\frac{45}{60}=\frac{15}{20}$ (числитель и знаменатель мы разделили на одно и то же число 3); полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 5, т. е. $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

В общем случае сокращение дроби возможно, если числитель и знаменатель не взаимно простые числа (см. п. 6); если же числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называется *несократимой:* например, $\frac{3}{4}$ — несократимая дробь. Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью.

11. Приведение дробей к общему знаменателю. Пусть даны две дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$. Они имеют разные знаменатели: 3 и 8, но, воспользовавшись основным свойством дроби (см. п. 10), можно заменить эти дроби другими, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели. Такое преобразование называется *приведением дробей к общему знаменателю.* Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{3}$ на 8, получим $\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{16}{24}$; умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{8}$ на 3, получим $\frac{15\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{45}{24}$. Итак, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$ приведены к общему знаменателю:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24};\quad \frac{15}{8}=\frac{45}{24}.$$

Заметим, что это не единственное решение поставленной задачи. Например, дроби можно было привести к общему знаменателю 48:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 16}{3\cdot 16}=\frac{32}{48};\quad \frac{15}{8}=\frac{15\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{90}{48},$$

и к общему знаменателю 72:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 24}{3\cdot 24}=\frac{48}{72};\quad \frac{15}{8}=\frac{15\cdot 9}{8\cdot 9}=\frac{135}{72},$$

и вообще к любому знаменателю, делящемуся одновременно на 3 и на 8.

Таким образом, привести дроби к общему знаменателю можно многими способами, но обычно стараются привести дроби к *наименьшему общему знаменателю*, который равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

Пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Решение. Найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30, т. е. $К(24, 30)=120$ (см. п. 7). Имеем $120:24=5$, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{7}{24}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 5:

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 5}{24\cdot 5}=\frac{35}{120}.$$

Имеем далее $120:30=4$, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{11}{30}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 4:

$$\frac{11}{30}=\frac{11\cdot 4}{30\cdot 4}=\frac{44}{120}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю:

$$\frac{7}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{44}{120}.$$

Числа 5 и 4 называют *дополнительными множителями* соответственно для первой и второй дроби. Используется следующая запись:

$$\frac{7}{24}=\frac{7^{5}}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{11^{4}}{30}=\frac{44}{120}.$$

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей;

2) вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

12. Арифметические действия над обыкновенными дробями. *Сложение* обыкновенных дробей выполняется так:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель, т. е. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$;

б) если знаменатели дробей различны, то дроби сначала приводят к общему знаменателю, предпочтительнее к наименьшему, а затем прнменяют правило а).

Пример 1. Сложить дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{5}}{24}+\frac{11^{4}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$$

Вычитание обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

б) если знаменатели различны, то сначала дроби приводят к общему знамеиателю, а затем применяют правило а).

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

т. е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели, первое произведение делают числителем, второе — знаменателем.

Например, $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

Деление обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

т. е. делнмое $\frac{a}{b}$ умножают на дробь $\frac{d}{c}$, обратную делителю $\frac{c}{d}$.

Например, $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}$.

Пример 2. Найти значение числового выражения

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}.$$

Решение. 1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4\cdot 12}{9\cdot 5}$. Сократив числитель и знаменатель на 3 (это полезно сделать до выполнения действий умножения в числителе и знаменателе), получим $\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}$, т. е. $\frac{16}{15}$. Итак, $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{16}{15}$.

2) $\frac{7}{3}:\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 5}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$.

3) При нахождении значения выражения $\frac{16}{15}+\frac{21}{20}-\frac{11}{30}$ действия сложения и вычитания можно выполнять одновременно. Наименьшим общим кратным чисел 15, 20, 30 является число 60. Приведем все три дроби к знаменателю 60, использовав дополнительные множители: для первой дроби 4, для второй — 3, для третьей — 2. Получим:

$$\frac{16^{4}}{15}+\frac{21^{3}}{20}-\frac{11^{2}}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$$

Пример 3. Выполнить действия: а) $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}$;

б) $1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}$.

Решение. а) Первый способ. Обратим каждое из данных смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполним сложение:

$$2\frac{1}{7}=2+\frac{1}{7}=\frac{14}{7}+\frac{1}{7}=\frac{15}{7};\quad 3\frac{2}{3}=3+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}+\frac{2}{8}=\frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{7}+\frac{11}{3}=\frac{15^{3}}{7}+\frac{11^{7}}{3}=\frac{45}{21}+\frac{77}{21}=\frac{122}{21}.$$

Обратим теперь неправильную дробь $\frac{122}{21}$ в смешанное число:

$$\frac{122}{21}=\frac{105+17}{21}=\frac{105}{21}+\frac{17}{21}=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}.$$

Второй способ. Имеем $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}=\left(2+\frac{1}{7}\right)+\left(3+\right.$
$\left.+\frac{2}{3}\right)=(2+3)+\left(\frac{1}{7}^{3}+\frac{2}{3}^{7}\right)=5+\left(\frac{3}{21}+\frac{14}{21}\right)=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}$.

б) В случае умножения и деления смешанных чисел всегда переходят к неправильным дробям:

$$1\frac{2}{5}=\frac{7}{5};\quad 2\frac{1}{7}=\frac{15}{7}.$$

Значит, $1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}=\frac{7}{5}\cdot\frac{15}{7}=\frac{7\cdot 15}{5\cdot 7}=3$.

13. Десятичные дроби. В виде *десятичной дроби* можно записать правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10^{n}. Например, $\frac{8}{10}=0{,}3$; $\frac{48}{100}=0{,}48$;

$\frac{21}{1000}=0{,}021$. Таким же образом можно записать смешанное число или неправильную дробь с указанным выше знаменателем (превратив ее предварительно в смешанное число). Например, $2\frac{3}{10}=2{,}3$; $\frac{317}{100}=3\frac{17}{100}=3{,}17$. В этих случаях целую часть смешанного числа отделяют запятой от числителя дробной части. Таким образом, десятичная дробь — это, по существу, другая форма записи дроби со знаменателем 10^n.

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Например, 4 — делитель числа 100, поэтому дробь $\frac{3}{4}$ можно представить в виде десятичной дроби: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$; 125 — делитель числа 1000, поэтому дробь $\frac{196}{125}$ можно представить в виде десятичной: $\frac{196}{125}=\frac{196\cdot 8}{125\cdot 8}=\frac{1568}{1000}=1{,}568$.

Общий вывод о представлении обыкновенной дроби в виде десятичной таков: если в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только двойки и пятерки, то эту дробь можно записать в виде десятичной; если же дробь несократима и в разложение ее знаменателя на простые множители входят, кроме двоек и пятерок, другие простые множители, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной дроби.

Рассмотрим десятичную дробь 7,234. Имеем:

$$7{,}234=7\frac{234}{1000}=7+\frac{200+30+4}{1000}=7+\frac{200}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{4}{1000}=7+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}.$$

Значит, в дроби 7,234 содержится 7 единиц, 2 десятых, 3 сотых и 4 тысячных. Вообще в десятичной дроби после запятой может быть сколько угодно разрядов: десятые, сотые, тысячные, десятитысячные и т. д.

Дробь 7,234 можно записать так:

$$7{,}234=7\frac{234}{1000}=7\frac{2340}{10000}=7\frac{23400}{1000000},\ \text{но}\ 7\frac{2340}{10000}=7{,}2340,$$

$$\text{а}\ 7\frac{23400}{100000}=7{,}23400.$$

Значит, $7{,}234=7{,}2340=7{,}23400$. Таким образом, *если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь окан-*

чивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить — получится равная ей дробь.

Для десятичных дробей вводится понятие значащей цифры числа. *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале. Например, в числе 23,4009 шесть значащих цифр; в числе 0,1023 четыре значащие цифры: 1, 0, 2, 3; в числе 0,0004 одна значащая цифра: 4.

14. Арифметические действия над десятичными дробями. При *сложении* десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая — под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. Сложим, например, дроби 12,7 и 3,442. Первая дробь содержит одну цифру после запятой, а вторая — три. Чтобы выполнить сложение, преобразуем первую дробь так, чтобы после запятой было три цифры: $12{,}7 = 12{,}700$, тогда

$$\begin{array}{r} 12{,}700 \\ +\ 3{,}442 \\ \hline 16{,}142 \end{array}$$

Аналогично выполняется *вычитание* десятичных дробей. Найдем разность чисел 13,1 и 0,37:

$$\begin{array}{r} 13{,}10 \\ -\ 0{,}37 \\ \hline 12{,}73 \end{array}$$

При *умножении* десятичных дробей достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате справа отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

Например, умножим 2,7 на 1,3. Имеем $27 \cdot 13 = 351$. Запятой отделим справа две цифры (сумма цифр у множителей после запятой равна двум). В итоге получаем $2{,}7 \cdot 1{,}3 = 3{,}51$.

Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут недостающие нули, например:

$$\begin{array}{r} 2{,}12 \\ \times\ 0{,}13 \\ \hline 636 \\ 212 \\ \hline 0{,}2756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}43 \\ \times\ 0{,}0002 \\ \hline 0{,}000686 \end{array}$$

Рассмотрим умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. Пусть нужно умножить дробь 12,733 на 10. Имеем $12\,733 \cdot 10 = 127\,330$. Отделив справа запятой три цифры, получим $12{,}733 \cdot 10 = 127{,}330$. Но $127{,}330 = 127{,}33$. Значит,

$12{,}733 \cdot 10 = 127{,}33$. Таким образом, умножение десятичной дроби на 10 сводится к переносу запятой на одну цифру вправо.

Вообще *чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, надо в этой дроби перенести запятую на 1, 2, 3 цифры вправо (приписав в случае необходимости к дроби справа определенное число нулей)*. Например, $1{,}47 \cdot 10\,000 = 14\,700$.

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Пусть надо разделить 22,1 на 13:

$$\begin{array}{r|l} 22{,}1 & 13 \\ \cline{2-2} 13 & 1{,}7 \\ \cline{1-1} 91 & \\ 91 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Если целая часть делимого меньше делителя, то в ответе получается нуль целых, например:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}221 & 13 \\ \cline{2-2} 13 & 0{,}017 \\ \cline{1-1} 91 & \\ 91 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Рассмотрим теперь *деление* десятичной дроби на десятичную. Пусть нужно разделить 2,576 на 1,12. Для этого и в делимом, и в делителе перенесем запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется после запятой в делителе (в данном примере на две). Иными словами, умиожим делимое и делитель на 100 — от этого частиое не изменится. Тогда нужно разделить дробь 257,6 на натуральное число 112, т. е. задача сводится к уже рассмотренному случаю:

$$\begin{array}{r|l} 257{,}6 & 112 \\ \cline{2-2} 224 & 2{,}3 \\ \cline{1-1} 336 & \\ 336 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево (при этом в случае иеобходимости слева приписывается нужное число нулей). Например, $27{,}344 : 10^4 = 0{,}0027344$.

Как для натуральных чисел деление ие всегда выполнимо, так оно не всегда выполнимо и для десятичных дробей. Разделим для примера 2,8 на 0,09:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 9 \\ \underline{27} & 31{,}11\ldots \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1\ldots & \end{array}$$

В результате получается так называемая бесконечная десятичная дробь. В таких случаях переходят к обыкновенным дробям. Например:

$$2{,}8:0{,}09=\frac{28}{10}:\frac{9}{100}=\frac{28\cdot 100}{10\cdot 9}=\frac{280}{9}=31\frac{1}{9}.$$

Может оказаться так, что одни числа записаны в виде обыкновенных дробей, другие — в виде смешанных чисел, третьи — в виде десятичных дробей. При выполнении действий над такими числами можно поступать по-разному: либо обратить десятичные дроби в обыкновенные и применить правила действий над обыкиовениыми дробями, либо обратить обыкновенные дроби и смешанные числа в десятичные дроби (если это возможно) и применить правила действий над десятичными дробями.

15. Проценты. Среди десятичиых дробей особенно часто на практике используется дробь 0,01, которая называется *процентом* и обозначается 1%. Так $1\%=0{,}01$, $2\%=0{,}02$, $45\%=0{,}45$, $350\%=3{,}5$ и т. д. В хозяйственных и статистических расчетах, во многих отраслях науки части величин принято выражать в процентах. Чтобы найти, например, 23% от 60 кг, нужно 60 кг умножить на 0,23, т. е. $60\cdot 0{,}23=13{,}8$. Значит, 23% от 60 кг составляют 13,8 кг.

Пример 1. Рабочий должен был изготовить за смену 80 деталей. По окончании рабочего дия оказалось, что он выполнил 150% сменного задания. Сколько деталей изготовил рабочий?

Решение. 1) $150\%=1{,}5$.
2) $80\cdot 1{,}5=120$.

Ответ: 120 деталей.

Пример 2. Рабочий должен изготовить за смену 80 деталей. К 12 часам он изготовил 55 деталей. Сколько процентов задания выполнил рабочий к указанному времени?

Решение. К 12 часам дня выполнена часть задания, выражающаяся дробью $\frac{55}{80}$, которую переводим в проценты:

$$\frac{55}{80}=\frac{550}{300}=\frac{550}{8}\cdot\frac{1}{100}=\frac{275}{4}\,\%=68{,}75\%.$$

Ответ: 68,75%.

Пример 3. Рабочий к 12 часам изготовил 55 деталей, что составило 68,75% сменного задания. Сколько деталей рабочий должен изготовить за смену?

Решение. Обозначим количество деталей, составляющих сменное задание, буквой x. Из условия задачи следует, что $68{,}75\%\cdot x=55$, т. е. что $\frac{68{,}75}{100}\cdot x=55$, откуда $x=\frac{100\cdot 55}{68{,}75}=80$.

Ответ: 80 деталей.

16. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь. Пусть дана десятичная дробь 2,73. Ее значение не изменится, если справа приписать любое число нулей (см. п. 13): $2{,}73=2{,}730=2{,}7300=\ldots=2{,}73\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ цифр}}$. Допускают также запись дроби 2,73 в виде десятичной дроби с бесконечным множеством нулей, т. е. $2{,}73=2{,}73000\ldots$. Здесь после запятой содержится бесконечно много десятичных знаков. Такая десятичная дробь называется *бесконечной десятичной дробью.*

Т.1.10. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Возьмем, например, число $\frac{3}{14}$ и будем делить числитель на знаменатель, постепенно получая десятичные знаки. При этом заметим, что любое натуральное число можно представить как бесконечную десятичную дробь, т. е. $3=3{,}0000\ldots$.

Имеем:

$$\begin{array}{l|l}
-\,3{,}00000000\ldots & 14 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{28} & 0{,}214285714\ldots \\
\;\;-\,20 & \\
\;\;\;\;\underline{14} & \\
\;\;\;\;-\,60 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{56} & \\
\;\;\;\;\;\;-\,40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{28} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;-\,120 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{112} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,80 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{70} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,100 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{98} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,20 & \\
\;\underline{14} & \\
\;60\ldots &
\end{array}$$

Таким образом, $\frac{3}{14}=0{,}214285714\ldots$.

Выпишем последовательно остатки, которые получились при выполнении операции деления:

2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, ...

Ясно, что все эти остатки меньше делителя, т. е. меньше числа 14. Это значит, что на каком-то шаге деления должен иеизбежно появиться снова такой остаток, который уже встречался ранее. Так, на седьмом шаге появился остаток 2, который был на первом шаге. Кроме того, ясно, что, как только появится остаток, который уже встречался, за ним пойдут остатки в той же последовательности, которая была ранее. В иашем примере за остатком 2 идет остаток 6, за ним 4, за ним 12 и т. д., т. е. мы получаем такую последовательность остатков:

2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, 4, 12, 8, 10, ...

Периодически повторяющиеся группы остатков приведут соответственно к периодически повторяющейся группе цифр в десятичной записи числа. Так, в иашем примере получим:

$$\frac{3}{14}=0{,}2142857142857142857\ldots .$$

Последовательно повторяющаяся группа цифр (минимальная) после запятой в десятичной записи числа называется *периодом*, а бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется *периодической*. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки:

$$0{,}2142857142857142857\ldots=0{,}2\,(142857).$$

Если период иачинается сразу после запятой, то дробь называется *чистой периодической;* если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь иазывается *смешанной периодической*. Так, $2{,}(23)=2{,}2323232323\ldots$— чистая периодическая дробь; $0{,}2\,(142857)$ — смешанная периодическая дробь; $2{,}73=2{,}73000\ldots=2{,}73\,(0)$ — смешаиная периодическая дробь.

17*. Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь.

Чтобы бесконечную десятичную дробь умножить на 10, 100, 1000 и т. д., достаточно, как и в конечной десятичной дроби, перенести запятую на одии, два, три и т. д. знака вправо.

Например, $0{,}1\,(23)\cdot 100=0{,}1232323\ldots\cdot 100=12{,}323232\ldots=$ $=12{,}(32)$.

Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную рассмотрим на примерах.

Пример. Обратить в обыкновенную дробь число: а) 0,(13); б) 2,(273); в) 0,2(54); г) 3,254(9).

Решение. а) Положим $x=0,(13)=0,131313...$. Умножим чистую периодическую дробь x на такое число, чтобы запятая переместилась ровно на период вправо. Поскольку в периоде две цифры, надо перенести запятую на две цифры вправо, а для этого достаточно умножить число x на 100, тогда $100x=0,131313...\cdot 100=13,1313...=13,(13)$. Теперь вычтем x из $100x$, получим $100x-x=13,(13)-0,(13)$. Значит, $99x=13$, откуда находим $x=\frac{13}{99}$.

б) Положим $x=2,(273)$. Эта чистая периодическая дробь содержит три цифры в периоде. Умножив x на 1000, получим $1000x=2273,(273)$.

Далее имеем:

$$1000x-x=2273,(273)-2,(273);\ 999x=2271,$$

$$x=\frac{2271}{999}=\frac{757}{333}=2\frac{91}{333}.$$

в) Положим $x=0,2(54)$. Перенесем в этой смешанной периодической дроби запятую вправо так, чтобы получилась чистая периодическая дробь. Для этого достаточно x умножить на 10, получим $10x=2,(54)$.

Положим $y=2,(54)$ и обратим эту чистую периодическую дробь в обыкновенную так, как мы это делали в предыдущих примерах.

Имеем $y=2,(54)$, откуда $100y=254,(54)$;

$100y-y=254,(54)-2,(54);\ 99y=252;\ y=\frac{252}{99}=\frac{28}{11}$. Значит, $10x=\frac{28}{11}$, откуда находим $x=\frac{28}{11\cdot 10}=\frac{14}{55}$.

г) Полагая $x=3,254(9)$, получим $1000x=3254,(9)$. Введем обозначение $y=1000x$. Тогда имеем:

$$y=3254,(9),\text{ откуда } 10y=32\,549,(9);$$

$$10y-y=32\,549,(9)-3254,(9);\ 9y=29\,295;\ y=3255;$$

$$1000x=3255;\ x=\frac{3255}{1000}=3\frac{51}{200}.$$

Заметим, что $\frac{3255}{1000}=3,255=3,255(0)$, т. е. мы получили конечную десятичную дробь, или бесконечную дробь с нулем в периоде. Значит, $3,254(9)=3,255(0)$. Это обстоятельство имеет

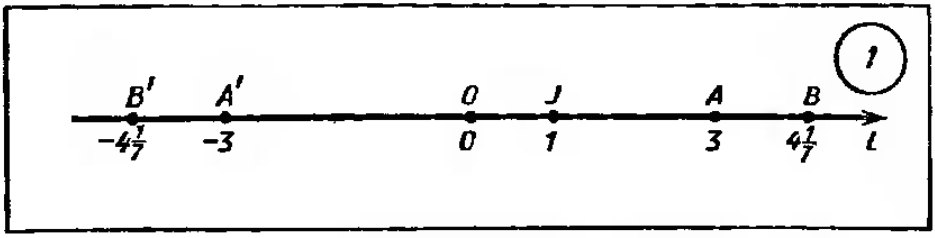
место для любых десятичных дробей с девяткой в периоде: такую дробь можно представить в виде дроби с нулем в периоде. Для этого достаточно лишь увеличить на единицу последний десятичный знак перед периодом. Например, $0{,}45\,(9) = 0{,}46\,(0)$; $14{,}(9) = 15{,}(0)$ и т. д.

18. Координатная прямая. Проведем прямую l, отметим на ней точку O, которую примем за начало отсчета, выберем направление и единичный отрезок [0; 1] (рис. 1).

В этом случае говорят, что задана *координатная прямая*. Каждому натуральному числу или дроби соответствует одна точка прямой l. Пусть, например, дано число 3. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок три раза, получим точку A — эта точка и соответствует числу 3. Возьмем число $4\frac{1}{7}$. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок четыре раза, а затем еще $\frac{1}{7}$ часть отрезка, получим точку B — она и соответствует числу $4\frac{1}{7}$.

Если точка M прямой l соответствует некоторому числу r, то это число называется *координатой точки*, в таком случае пишут $M(r)$. Так, для точек J, A, B (рис. 1) можно указать их координаты $J(1)$, $A(3)$, $B\left(4\frac{1}{7}\right)$. Координатой точки O считается число нуль.

Отложим теперь три раза единичный отрезок от точки O в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке A относительно начала отсчета O. Координатой точки A является число 3, а координату точки A' записывают так: $-3-$ и читают: «Минус 3». Аналогично координатой точки B', симметричной точке B, на рисунке 1 считается число $-4\frac{1}{7}$. Числа 3 и -3, $4\frac{1}{7}$ и $-4\frac{1}{7}$ называют *противоположными*. Числа, которым соответствуют точки, расположенные на координатной прямой в заданном направлении, называют *положительными*; так, 1, 3, $4\frac{1}{7}$ — положительные числа. Положительные числа пишут



иногда со знаком «плюс»: $+1$, $+3$, $+4\frac{1}{7}$. Числа, которым соответствуют точки, расположенные на координатной прямой в направлении, противоположном заданному, называют *отрицательными*; так, -3, $-4\frac{1}{7}$ — отрицательные числа. Число 0 не считается ни положительным, ни отрицательным; точка O, соответствующая числу 0, отделяет на координатной прямой точки с положительными координатами от точек с отрицательными координатами.

Заданное направление на координатной прямой называют *положительным* (обычно оно идет вправо), а направление, противоположное заданному,— *отрицательным*.

19. Множество рациональных чисел. Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 ... называют также положительными целыми числами. Числа -1, -2, -3, -4, -5, ..., противоположные натуральным, называют отрицательными целыми числами. Число 0 также считают целым числом. Итак, *целые числа* — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество *рациональных чисел*.

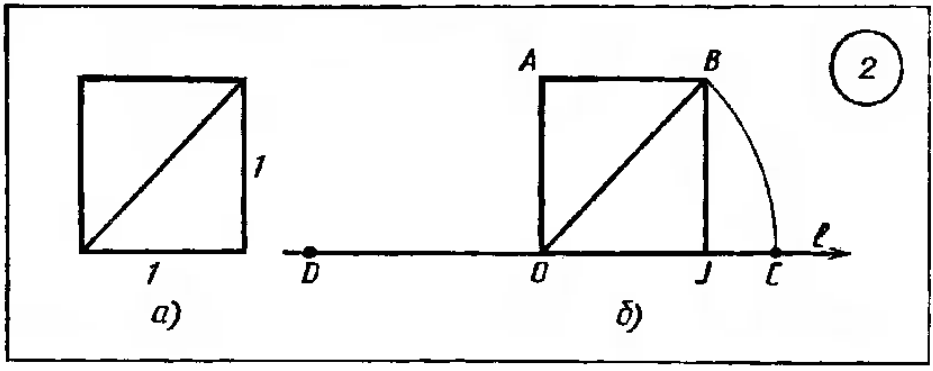
Заметим, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, причем одно и то же число можно записать в виде отношения многими способами. Например:

$$-2=\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-100}{50};\quad 0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{300}{1000}.$$

Среди дробей, обозначающих данное рациональное число, имеется одна и только одна несократимая дробь. Для целых чисел — это дробь со знаменателем 1.

§ 3. Действительные числа

20. Иррациональные числа. Для измерения используются не только рациональные числа, но и числа иной природы, т. е. не являющиеся целыми или дробными. Все такие числа называются *иррациональными*. Например, длина диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 2,*а*) должна выражаться некоторым положительным числом r, таким, что $r^2=1^2+1^2$ (по теореме Пифагора, см. с. 281), т. е. таким, что $r^2=2$. Число r не может быть целым, так как $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$ и т. д. Число r не может быть и дробным: если $r=\frac{m}{n}$ — несократимая



дробь, где $n \neq 1$, то $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ тоже будет несократимой дробью, где $n^2 \neq 1$; значит, $\frac{m^2}{n^2}$ не является целым числом, а потому не может равняться 2. Поэтому длина диагонали квадрата выражается иррациональным числом, оно обозначается $\sqrt{2}$ (читается: «Квадратный корень из двух»). На рисунке 2, *б* изображена координатная прямая l, $OABJ$ — квадрат, $OC = OB = OD$. Тогда координатой точки C является число $\sqrt{2}$, а координатой точки D — число $-\sqrt{2}$. Обе точки C и D имеют иррациональные координаты.

Аналогично не существует рационального числа, квадрат которого равен 5, 7, 10. Соответствующие иррациональные числа обозначаются $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$. Противоположные им числа также иррациональны, они обозначаются $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$.

Следует подчеркнуть, что к иррациональным числам приводит не только задача отыскания числа, квадрат которого равен заданному положительному числу. Например, число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, нельзя представить в виде обыкновенной дроби — это иррациональное число.

Так как любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби (см. п. 16) и в свою очередь любая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет собой рациональное число (см. п. 17), то каждое иррациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби и в свою очередь любая бесконечная десятичная непериодическая дробь есть иррациональное число.

21. Действительные числа. Числовая прямая. Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество *действительных чисел*. Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительно-

му числу (достаточно найти расстояние до этой точки от начала отсчета и поставить перед найденным числом знак + или — в зависимости от того, справа или слева от начала отсчета находится заданная точка). Для краткости обычно вместо фразы «точка координатной прямой, соответствующая действительному числу a», пишут и говорят «точка a», а употребляя термин «число a», имеют в виду «действительное число a».

Множество действительных чисел называют также *числовой прямой*. Геометрической моделью числовой прямой служит координатная прямая.

22. Обозначения некоторых числовых множеств.

N — множество натуральных чисел.

Z — множество целых чисел.

Q — множество рациональных чисел.

R — множество действительных чисел.

Запись $n \in N$ (читается: «n принадлежит множеству N») обозначает, что n — натуральное число. Аналогичный смысл имеют следующие обозначения: $m \in Z$ (m — целое число); $r \in Q$ (r — рациональное число); $x \in R$ (x — действительное число).

23. Сравнение действительных чисел. Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое больше, а какое меньше.

Говорят, что число a *больше* числа b, и пишут: $a > b$, если разность $a - b$ — *положительное* число; если же разность $a - b$ — *отрицательное* число, то говорят, что число a *меньше* числа b, и пишут: $a < b$. Согласно этому определению любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из отношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

С геометрической точки зрения неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой левее (правее) точки b.

Знаки $<$, $>$ называются *знаками строгих неравенств*. Иногда используются знаки $\geqslant$, $\leqslant$ — *знаки нестрогих неравенств;* запись $a \leqslant b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b, или число a равно числу b. Например, $3 \leqslant 5$, $5 \geqslant 5$ — верные неравенства. Неравенства $a > b$ и $c > d$ называются неравенствами одного знака; неравенства $a > b$ и $c < d$ называются неравенствами противоположных знаков. Если числа a, b, c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то используется запись $a < b < c$.

Пример. Сравнить числа $\frac{2}{3}$ и 0,67.

Решение. Составим разность $\frac{2}{3}-0{,}67$ и найдем значение этой разности:

$$\frac{2}{3}-0{,}67=\frac{2}{3}-\frac{67}{100}=\frac{2\cdot 100-67\cdot 3}{300}=-\frac{1}{300}.$$

Разность отрицательна, поэтому $\frac{2}{3}<0{,}67$.

24. Свойства числовых неравенств. Для любых действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства:

1^0. *Если* $a>b$, *то* $b<a$.

2^0. *Если* $a>b$ *и* $b>c$, *то* $a>c$ *(свойство транзитивности).*

3^0. *Если* $a>b$, *то* $a+c>b+c$.

4^0. *Если* $a>b$ *и* c *— положительное число* $(c>0)$, *то* $ac>bc$. Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.*

Доказательство. Рассмотрим разность $ac-bc$. Имеем $ac-bc=c(a-b)$. По условию c — положительное число, а так как $a>b$, то и $a-b$ — положительное число. Но произведение двух положительных чисел есть положительное число, значит, $c(a-b)>0$. Таким образом, $ac-bc>0$. Но если разность $ac-bc$ — положительное число, то $ac>bc$.

5^0. *Если* $a>b$ *и* c *— отрицательное число* $(c<0)$, *то* $ac<bc$. Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

6^0. *Если* $a>b$ *и* $c>d$, *то* $a+c>b+d$ *(если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получится верное неравенство).*

7^0. *Если* a, b, c, d *— положительные числа, причем* $a>b$ *и* $c>d$, *то* $ac>bd$ *(если почленно перемножить верные неравенства одного знака левые и правые части которых положительные числа, то получится верное неравенство).*

Доказательство. Так как $a>b$ и $c>0$, то по свойству 4^0 $ac>bc$; аналогично из $c>d$ и $b>0$ следует $bc>bd$. Так как далее $ac>bc$ и $bc>bd$, то по свойству 2^0 $ac>bd$.

8^0. *Если* $a>b$ *и* $c<d$, *то* $a-c>b-d$.

9^0. *Если* $a>b>0$, *то* $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

10^0. *Если* $a>b>0$, *то для любого натурального числа* n *выполняется неравенство* $a^n>b^n$.

25. Числовые промежутки. Возьмем два числа a и b, такие, что $a<b$, и отметим на координатной прямой соответствующие им точки.

Произвольная точка x, лежащая между a и b, соответствует числу, которое удовлетворяет неравенствам $a<x<b$. Множество всех чисел x, удовлетворяющих этим неравенствам, обозначают $(a;\ b)$ и называют *интервалом*.

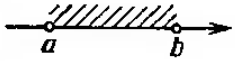
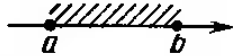
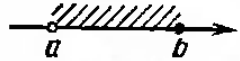
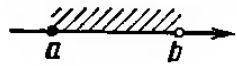
Множество всех чисел x, каждое из которых удовлетворяет неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$, обозначают $[a;\ b]$ и называют *отрезком*.

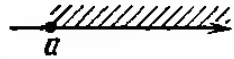
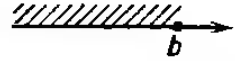
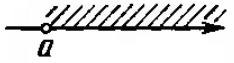
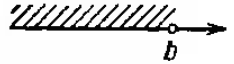
Интервал и отрезок — это конечные числовые промежутки. Конечные числовые промежутки бывают еще двух видов: $[a;\ b)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих иеравеиствам $a\leqslant x<b$, и $(a;\ b]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих иеравенствам $a<x\leqslant b$. Эти промежутки называют *полуинтервалами*.

Вывают и бесконечные числовые промежутки. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x\geqslant a$, обозначают $[a;\ +\infty)$ и называют *лучом*, а множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x>a$, обозначают $(a;\ +\infty)$ и называют *открытым лучом*. Знак «$+\infty$» читается: «Плюс бесконечность».

Аналогично может быть луч вида $(-\infty;\ b]$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x\leqslant b$) и открытый луч вида $(-\infty;\ b)$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x<b$). Знак «$-\infty$» читается: «Минус бесконечиость».

В приведенной ниже таблице для каждого вида числового промежутка даны его геометрическое изображение, обозначение и запись с помощью неравенств.

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a;\ b)$	$a<x<b$
Отрезок		$[a;\ b]$	$a\leqslant x\leqslant b$
Полуинтервал		$(a;\ b]$	$a<x\leqslant b$
Полуинтервал		$[a;\ b)$	$a\leqslant x<b$

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Луч		$[a;\ +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty;\ b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a;\ +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty;\ b)$	$x < b$

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», заменяя их общим названием *«числовой промежуток»*.

26. Модуль действительного числа. *Модулем (абсолютной величиной)* действительного числа a называется само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi - 3 > 0$ ($\pi = 3{,}14...$);

$|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7$, так как $-3{,}7 < 0$.

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки O (рис. 3).

Свойства модулей:

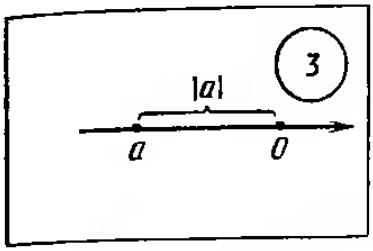
1^0. $|a| \geqslant 0$.

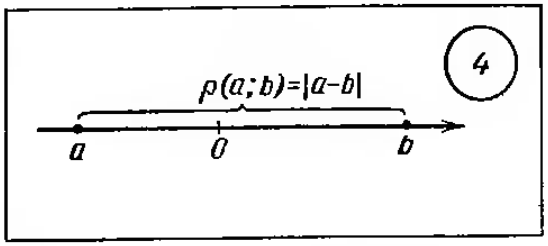
2^0. $|a| = |-a|$.

3^0. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4^0. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

5^0. $|a|^2 = a^2$.





27. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой. Если a и b — две точки координатной прямой, то *расстояние* между ними $\rho(a;\ b)$ выражается формулой $\rho(a;\ b)=|a-b|$ (рис. 4). Ясно, что $\rho(a;\ b)=\rho(b;\ a)$. Так, $\rho(-2;\ 5)=|-2-5|=|-7|=-(-7)=7$.

Пример. Найти все такие точки x, которые удовлетворяют: а) уравнению $|x-1|=3$; б) неравенству $|x+1|\leqslant 2$.

Решение. а) Уравнению удовлетворяют такие точки x, расстояние которых от точки 1 равно 3. Это точки -2 и 4 (рис. 5). Значит, уравненне имеет два корня: -2; 4.

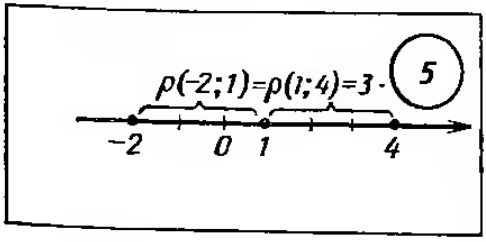
б) Неравенству удовлетворяют такие точки x, которые удалены от точки -1 на расстояние, меньшее или равное 2. Это точки из отрезка $[-3;\ 1]$ (рис. 6).

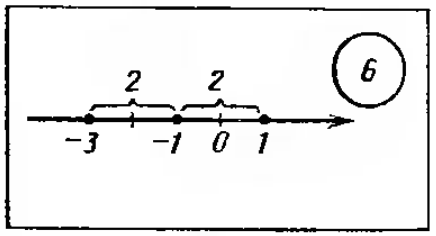
28. Правила действий над действительными числами. Сумма двух чисел одного знака есть число того же знака; чтобы найти модуль такой суммы, надо сложить модули слагаемых. Например, $(+12)+(+8)=+20$; $(-12)+(-8)=-20$.

Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с бóльшим модулем; чтобы найти модуль этой суммы, надо из большего модуля вычесть меньший. Например, $(+12)+(-8)=+(12-8)=4$; $(-12)+(+8)=-(12-8)=-4$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $12-(-8)=12+8=20$; $12-(+8)=12+(-8)=4$.

Произведение (частное) двух чисел одного знака есть число положительное, а произведение (частное) двух чисел разных знаков есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) моду-





ли данных чисел. Например, $(-12)\cdot(-8)=+12\cdot 8=96$; $(-24):(+3)=-\frac{24}{3}=-8$.

29. Свойства арифметических действий над действительными числами.

1^0. $a+b=b+a$.
2^0. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3^0. $a+0=a$.
4^0. $a+(-a)=0$.
5^0. $ab=ba$.
6^0. $(ab)c=a(bc)$.
7^0. $a(b+c)=ab+ac$.
8^0. $a\cdot 1=a$.
9^0. $a\cdot\frac{1}{a}=1$, $a\neq 0$.

Эти свойства называют иногда основными законами алгебры, причем свойства 1^0 и 5^0 выражают *переместительный* закон соответственно сложения и умножения, свойства 2^0 и 6^0 — *сочетательный* закон, а свойство 7^0 — *распределительный* закон умножения относительно сложения.

Из этих свойств выводятся другие свойства. Например, $a\cdot 0=0$. В самом деле, имеем:

$$a\cdot 0=a(b+(-b))=ab+a(-b)=ab+(-ab)=0.$$

30. Пропорции. Пусть a, b, c, d — действительные числа, отличные от 0, и пусть имеет место равенство $a:b=c:d$. Это равенство называют *пропорцией*, числа a и d — *крайними членами*, а числа b и c — *средними членами* пропорции. Для пропорции можно использовать и запись $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Например, можно составить пропорцию из чисел 2,5; -4; -5 и 8:

$$\frac{2,5}{-4}=\frac{-5}{8}.$$

Справедливы следующие утверждения:

Т.1.11. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Т.1.12. Крайние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

Т.1.13. Средние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

31. Целая часть числа. Дробная часть числа. Пусть x — действительное число. Его *целой частью* называется наибольшее целое число, не превосходящее x; целая часть числа x обозначается $[x]$. *Дробной частью* числа x называется разность между числом и его целой частью, т. е. $x-[x]$; дробная часть числа обозначается $\{x\}$. Значит,

$$\{x\}=x-[x].$$

Например, $[2{,}35]=2$, а $\{2{,}35\}=0{,}35$;

$[10]=10$, а $\{10\}=0$;

$[-0{,}85]=-1$, а $\{-0{,}85\}=-0{,}85-(-1)=0{,}15$.

32. Степень с натуральным показателем. Выше (см. п. 5) определено понятие степени натурального числа с натуральным показателем. Теперь обобщим это определение для любого действительного основания степени. Пусть a — действительное число, а n — натуральное число, большее единицы, *n-й степенью числа a* называют произведение n множителей, каждый из которых равен a, т. е. $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}$. Если $n=1$, то полагают $a^1=a$. Число a — *основание степени*, n — *показатель степени*.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{31}$.

Справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

$1^0.\ a^n\cdot a^k=a^{n+k}$.

$2^0.\ a^n:a^k=a^{n-k}$, если $n>k$.

$3^0.\ (a^n)^k=a^{nk}$.

$4^0.\ a^n\cdot b^n=(ab)^n$.

$5^0.\ \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b\neq 0$.

Например, $2^3\cdot 2^5=2^{3+5}=2^8$; $(2^3)^5=2^{3\cdot 5}=2^{15}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^3}{5^3}=\frac{3}{125}$.

33. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем. Полагают по определению: *если $a\neq 0$, то $a^0=1$*. Например, $(2{,}7)^0=1$; $(-5)^0=1$. Нулевая степень числа 0 не имеет смысла.

Полагают по определению: *если $a\neq 0$ и n — натуральное число, то*

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Например, $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$.

Справедливо равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

34. Стандартный вид положительного действительного числа. Любое положительное число a можно представить в виде $a_1\cdot 10^n$, где $1\leqslant a_1<10$, а n — целое число.

Пример 1. Пусть $a=395$, тогда $a=3{,}95\cdot 10^2$; здесь $a_1=3{,}95$ и $n=2$.

Пример 2. Пусть $a=4{,}13$, тогда $a=4{,}13\cdot 10^0$; здесь $a_1=4{,}13$ и $n=0$.

Пример 3. Пусть $a=0{,}0023$, тогда $a=2{,}3\cdot 10^{-3}$; здесь $a_1=2{,}3$, $n=-3$.

Если положительное число a представлено в виде $a_1\cdot 10^n$, где $1\leqslant a_1<10$, n — целое число, то говорят, что число a записано *в стандартном виде;* показатель n называют при этом *порядком* числа.

Для того чтобы положительное число a представить в стандартном виде, нужно поставить запятую так, чтобы в целой части оказалась одна значащая цифра (см. п. 13), и умножить полученное число на 10^n так, чтобы в результате умножения запятая вернулась на то место, которое она занимала в числе a. Так мы действовали в примерах 1, 2, 3.

В примере 1, отделив в числе 395 первую значащую цифру, получили 3,95; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на две цифры вправо — это равносильно умножению на 10^2. Значит, $395=3{,}95\cdot 10^2$.

В примере 2 уже отделена запятой одна значащая цифра, поэтому $4{,}13=4{,}13\cdot 10^0$.

В примере 3, отделив запятой в числе 0,0023 первую значащую цифру, получили 2,3; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на три цифры влево — это равносильно делению на 10^3 или умножению на 10^{-3}. Значит, $0{,}0023=2{,}3\cdot 10^{-3}$.

35. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Если $a\geqslant 0$ и n — натуральное число, большее 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x, такое, что выполняется равенство $x^n=a$. Это число x называется *арифметическим корнем* n-й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным числом, n — показателем корня.* Если $n=2$, то обычно пишут $\sqrt{a}$ (опуская показатель корня) и называют

это выражение *квадратным корнем*. Часто вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Итак, согласно определению запись $\sqrt[n]{a}=x$, где $a\geqslant 0$, означает, во-первых, что $x\geqslant 0$ и, во-вторых, что $x^n=a$, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Например, $\sqrt{49}=7$, $\sqrt[3]{125}=5$, $\sqrt[10]{0}=0$.

Если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то справедливы следующие свойства:

1^0. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2^0. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$.

3^0. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$.

4^0. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

5^0. $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$.

Свойство 1^0 распространяется на произведение любого числа миожителей. Например, $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 125}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=2\cdot 3\cdot 5=30$.

Пример. Упростить: а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; б) $(\sqrt[5]{a^2})^3$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; г) $\sqrt[6]{a^4}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2}$;

б) $(\sqrt[5]{a^2})^3=\sqrt[5]{(a^2)^3}=\sqrt[6]{a^6}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[4\cdot 3]{a}=\sqrt[12]{a}$;

г) $\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкореиного выражения разделили на 2).

36. Корень нечетной степени из отрицательного числа. Пусть $a<0$, а n — натуральное число, большее 1. Если n — четное число, то равенство $x^n=a$ не выполняется ни при каком действительном эиачении x. Это значит, что в области действительных чисел нельзя определить корень четной степени из отрицательного числа. Если же n — нечетное число, то существует одно и только одно действительное число x, такое, что $x^n=a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют *корнем нечетной степени n из отрицательного числа a*.

Например, $\sqrt[3]{-8}=-2$, так как $(-2)^3=-8$; $\sqrt[5]{-243}=-3$, так как $(-3)^5=-243$.

В случае нечетных показателей корней свойства радикалов, справедливые для неотрицательных значений подкоренных выражений (п. 35), верны и для отрицательных значений подкоренных выражений.

Например, $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ для любых a и b.

37. Степень с дробным показателем. Полагают по определению: если $a \geqslant 0$ и m, n — натуральные числа, $n \geqslant 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

если $a > 0$, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.

Пример. Вычислить $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27;$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

38. Свойства степеней с рациональными показателями. Для любого числа a определена операция возведения в натуральную степень (см. п. 32); для любого числа $a \neq 0$ определена операция возведения в нулевую и целую отрицательную степень (см. п. 33); для любого $a \geqslant 0$ определена операция возведения в положительную дробную степень (см. п. 37), и, наконец, для любого $a > 0$ определена операция возведения в отрицательную дробную степень (см. п. 37).

Пример. Вычислить $(6{,}25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} - (-4)^{-1} \cdot (0{,}343)^0$.

Решение. $(6{,}25)^{0,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$; $(-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$; $(0{,}343)^0 = 1$.

В итоге получаем:

$$(6{,}25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} - (-4)^{-1} \cdot (0{,}343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1{,}5.$$

Если $a > 0$, $b > 0$ и r, s — любые рациональные числа, то:

$1^0.$ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

$2^0.$ $a^r : a^s = a^{r-s}$.

$3^0.$ $(a^r)^s = a^{rs}$.

$4^0.$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

$5^0.$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

39. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра больше или равна пяти, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на 1. Если же первая следующая за этим разрядом цифра меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют.

Пример 1. Округлить число $\alpha = 2471{,}05624$ с точностью до: а) десятков; б) единиц; в) десятых; г) сотых; д) тысячных.

Решение. а) Цифра единиц, следующая за разрядом десятков, равна 1, т. е. меньше 5. Значит, округлив до десятков, имеем $\alpha \approx 2470$. Знак $\approx$ называют *знаком приближенного равенства.*

б) Цифра десятых равна 0, значит, округлив до единиц, имеем $\alpha \approx 2471$.

в) Цифра сотых равна 5, значит, округлив до десятых, имеем $\alpha \approx 2471{,}1$.

г) Цифра тысячных равна 6, значит, округлив до сотых, имеем $\alpha \approx 2471{,}06$.

д) Цифра десятитысячных равна 2, значит, округлив до тысячных, имеем $\alpha = 2471{,}056$.

Все найденные значения называются *приближенными значениями числа* $\alpha = 2471{,}05624$.

Приближенные значения появляются не только при округлении чисел. Чаще они возникают при различных измерениях (длин, масс, температур и т. д.). При этом важно знать, с какой точностью выполнено измерение.

Пусть a — приближенное значение числа α. Тогда модуль разности чисел α и a, т. е. $|\alpha - a|$, называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа α, а отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения называется *относительной погрешностью* приближенного значения. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Пример 2. Взвесив деталь, масса которой равна 54,12705 г, на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, получили приближенное значение массы 54,1 г. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближенного значения.

Решение. Абсолютная погрешность равна $54{,}12705 - 54{,}1 = 0{,}02705$.

Относительная погрешность равна $\frac{0{,}02705}{54{,}1} \cdot 100\% = 0{,}05\%$.

При измерениях, как правило, точные значения величин

бывают неизвестны, поэтому важны сведения об абсолютных погрешностях приближенных значений. Если, например, деталь массы m взвесили на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, то это значит, что абсолютная погрешность измерения будет не более 0,1 г. Так, если, взвесив деталь, получили 54,1 г, то точное значение массы m может отклоняться от 54,1 в ту или иную сторону не более чем на 0,1, т. е. $54{,}1-0{,}1\leqslant m\leqslant 54{,}1+0{,}1$. Короче это записывают так: $m=54{,}1\pm 0{,}1$.

Вообще если абсолютная погрешность приближенного значения a, найденного для интересующего нас числа α, не превосходит некоторого числа h, то пишут $\alpha=a\pm h$; говорят, что a — приближенное значение числа α *с точностью до* h.

Пример 3. Найти приближенное значение числа $\alpha=2471{,}05624$ с точностью до 0,01.

Решение. Округлив число α до сотых, получим (см. пример 1, г) $a=2471{,}06$.

Абсолютная погрешность этого приближенного значения равна $|2471{,}05624-2471{,}06|=0{,}00376<0{,}01$. Значит, 2471,06 — приближенное значение числа α с точностью до 0,01.

В математических таблицах обычно даются приближенные значения величин. При этом считают, что абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего разряда. Например, найдя по таблице для числа $\sqrt{2}$ значение 1,4142, мы должны понимать, что это — приближенное значение с точностью до 0,0001, т. е. что его абсолютная погрешность не превосходит 0,00005:

$$\sqrt{2}=1{,}4142\pm 0{,}00005.$$

40. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку. Возьмем иррациональное число $\sqrt{2}$. Имеем:

$$\begin{array}{cc}
1^2<2<2^2 & 1<\sqrt{2}<2\\
1{,}4^2<2<1{,}5^2 & 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5\\
1{,}41^2<2<1{,}42^2 & 1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42\\
1{,}414^2<2<1{,}415^2 & 1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415\\
1{,}4142^2<2<1{,}4143^2 & 1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143
\end{array}$$

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 называются *десятичными приближениями числа* $\sqrt{2}$ *по недостатку* с точностью соответственно до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001. Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 называются *десятичными приближениями числа* $\sqrt{2}$ *по избытку* соответственно с той же точностью.

Для числа $\sqrt{2}$ используют представление в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$. Вообще *любое действи-*

тельное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем периодической, если число рациональное (см. п. 16), *и непериодической, если число иррациональное.*

Например, $\frac{14}{55}=0{,}2\,(54)=0{,}2545454...$ (см. п. 17). Десятичное приближение числа $\frac{14}{55}$ с точностью до 0,001 по недостатку равно 0,254, а по избытку равно 0,255.

Число π имеет вид $\pi=3{,}1415926...$. Десятичное приближение числа π с точностью до 0,0001 по недостатку равно 3,1415, а по избытку —3,1416.

41*. Правило извлечения квадратного корня из натурального числа. Пусть нужно извлечь квадратный корень из натурального числа m, причем известно, что корень извлекается. Чтобы найти результат, иногда удобно воспользоваться следующим правилом.

1. Разобьем число m на грани (справа налево, начиная с последней цифры), включив в каждую грань по две рядом стоящие цифры. При этом следует учесть, что если m состоит из четного числа цифр, то в первой (слева) грани будет две цифры; если же число m состоит из нечетного числа цифр, то первая грань состоит из одной цифры. Количество граней показывает количество цифр результата.

2. Подбираем наибольшую цифру, такую, что ее квадрат не превосходит числа, находящегося в первой грани; эта цифра — первая цифра результата.

3. Возведем первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из первой грани, припишем к найденной разности справа вторую грань. Получится некоторое число A. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число a. Теперь подберем такую наибольшую цифру x, чтобы произведение числа $\overline{ax}$ на x не превосходило числа A. Цифра x — вторая цифра результата.

4. Произведение числа $\overline{ax}$ на x вычтем из числа A, припишем к найденной разности справа третью грань, получится некоторое число B. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число b. Теперь подберем такую наибольшую цифру y, чтобы произведение числа $\overline{by}$ на y не превосходило числа B. Цифра y — третья цифра результата.

Следующий шаг правила повторяет 4-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{138384}$.

Решение. Разобьем число на грани: 13'83'84— их три, значит, в результате должно получиться трехзначное число. Первая цифра результата 3, так как $3^2<13$, тогда как

$4^2 > 13$. Вычтя 9 из 13, получим 4. Приписав к 4 следующую грань, получим $A = 483$. Удвоив имеющуюся часть результата, т. е. число 3, получим $a = 6$. Подберем теперь такую наибольшую цифру x, чтобы произведение двузначного числа $\overline{ax}$ на x было меньше числа 483. Такой цифрой будет 7, так как $67 \cdot 7 = 469$ — это меньше 483, тогда как $68 \cdot 8 = 544$ — это больше 483. Итак, вторая цифра результата 7.

Вычтя 469 из 483, получим 14. Приписав к этому числу справа последнюю грань, получим $b = 1484$. Удвоив имеющуюся часть результата, т. е. число 37, получим $B = 74$. Подберем теперь такую наибольшую цифру y, чтобы произведение трехзначного числа $\overline{by}$ на y не превосходило 1484. Такой цифрой будет 2, так как $742 \cdot 2 = 1484$. Цифра 2 — последняя цифра результата. В ответе получили 372.

$$\sqrt{13'83'84} = 372$$

	9	
$\times$ 67	7	483
		469
$\times$ 742	2	1484
		1484
		0

Пример 2. Вычислить $\sqrt{45\,369}$.

Решение.

$$\sqrt{4'53'69} = 213$$

	4	
$\times$ 41	1	53
		41
$\times$ 423	3	1269
		1269
		0

Если корень не извлекается, то после последней цифры заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. В этом случае процесс извлечения корня бесконечен; он прекращается, когда достигается требуемая точность.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{7}$ с точностью до 0,01.

Решение.

$$\sqrt{7{,}00'00\ldots} = 2{,}645\ldots$$

	4	
$\times$ 46	6	300
		276
$\times$ 524	4	2400
		2096
$\times$ 5285	5	30400
		26425
		3975
		....

Итак, с точностью до 0,01 имеем $\sqrt{7}=2{,}65$.

42. Понятие о степени с иррациональным показателем. Пусть α — иррациональное число. Какой смысл вкладывается в запись a^{α}, где a — положительное число? Рассмотрим три случая: $a=1$, $a>1$, $0<a<1$.

1) Если $a=1$, то полагают $1^{\alpha}=1$.

2) Пусть $a>1$. Возьмем любое рациональное число $r_1<\alpha$ и любое рациональное число $r_2>\alpha$. Тогда $r_1<r_2$ и $a^{r_1}<a^{r_2}$. В этом случае под a^{α} понимают такое число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, таких, что $r_1<\alpha$, а $r_2>\alpha$. В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого $a>1$ и любого иррационального α.

3) Пусть $0<a<1$. Возьмем любое рациональное число $r_1<\alpha$ и любое рациональное число $r_2>\alpha$. Тогда $r_1<r_2$ и $a^{r_1}>a^{r_2}$. В этом случае под a^{α} понимают такое число, которое заключено между a^{r_2} и a^{r_1} для любых рациональных чисел r_2 и r_1, удовлетворяющих неравенству $r_1<\alpha<r_2$. В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого числа a из интервала $(0;\ 1)$ и любого иррационального α.

43. Свойства степеней с действительными показателями. Если $a>0$, $b>0$ и x, y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

$$1^0.\ a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$$

$$2^0.\ a^x:a^y=a^{x-y}.$$

$$3^0.\ (a^x)^y=a^{xy}.$$

$$4^0.\ a^x\cdot b^x=(ab)^x.$$

$$5^0.\ \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

§ 4. Комплексные числа

44. Понятие о комплексном числе. Процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами самой математики. Сначала для счета предметов использовались натуральные числа. Затем необходимость выполнения деления привела к понятию дробных положительных чисел; далее, необходимость выполнения вычитания — к понятиям нуля и отрицательных чисел; наконец, необходимость извлечения корней из положительных чисел — к понятию иррациональных чисел. Все перечисленные операции выполнимы на множестве действительных чисел. Однако остались и невыполнимые на этом множестве операции, например извлечение квадратного корня

из отрицательного числа. Значит, имеется потребность в дальнейшем расширении понятия числа, в появлении новых чисел, отличных от действительных.

Геометрически действительные числа изображаются точками на координатной прямой: каждому действительному числу соответствует одна точка прямой («образ» действительного числа) и, обратно, каждая точка координатной прямой соответствует одному действительному числу. Координатная прямая сплошь заполнена образами действительных чисел, т. е., выражаясь фигурально, «на ней нет места для новых чисел». Возникает предположение о том, что геометрические образы новых чисел надо искать уже не на прямой, а на плоскости. Однако каждую точку M координатной плоскости xy можно отождествить с координатами этой точки. Поэтому естественно в качестве новых чисел — их называют комплексными — ввести упорядоченные пары действительных чисел (упорядоченные в том смысле, что $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ — разные точки, а значит, и разные числа).

Комплексным числом называется всякая упорядоченная пара $(a;\ b)$ действительных чисел a и b.

Два комплексных числа $(a;\ b)$ и $(c;\ d)$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.

45. Арифметические операции над комплексными числами. *Суммой комплексных чисел* $z=(a;\ b)$ и $w=(c;\ d)$ называется комплексное число $(a+c;\ b+d)$.

Например, $(2;\ 7)+(3;\ -4)=(2+3;\ 7-4)=(5;\ 3)$; $(-1;\ 0)+(4;\ 7)=(-1+4;\ 0+7)=(3;\ 7)$.

Комплексным нулем считают пару $(0;\ 0)$. Числом, *противоположным* числу $z=(a;\ b)$, считают число $(-a;\ -b)$; обозначают его $-z$.

Разностью комплексных чисел z и w называют, как обычно, такое число u, что $z=w+u$. Разность всегда существует и единственна. В самом деле, пусть $z=(a;\ b)$, $w=(c;\ d)$, $u=(x;\ y)$. Тогда $(a;\ b)=(c;\ d)+(x;\ y)$, т. е. $(a;\ b)=(c+x;\ d+y)$. Это значит, что $a=c+x$, $b=d+y$, откуда находим $x=a-c$, $y=b-d$, т. е. $u=(x;\ y)=(a-c;\ b-d)$.

Таким образом, получаем следующее правило вычитания комплексных чисел: $(a;\ b)-(c;\ d)=(a-c;\ b-d)$.

Например, $(9;\ 10)-(8;\ 12)=(9-8;\ 10-12)=(1;\ -2)$.

Произведением комплексных чисел $z=(a;\ b)$ и $w=(c;\ d)$ называется комплексное число $(ac-bd;\ ad+bc)$.

Например, если $z=(2;\ 5)$, $w=(3;\ 1)$, то $zw=(2\cdot 3-5\cdot 1;\ 2\cdot 1+5\cdot 3)=(1;\ 17)$.

Арифметические операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что арифметические операции над действительными числами (см. п. 29).

Пусть $z=(a;\ b)$, $w=(c;\ d)\neq(0;\ 0)$. Существует, и только одно, комплексное число $u=(x;\ y)$, такое, что $z=uw$. Это число u называют, как обычно, *частным* от деления z на w.

Имеем $uw=(x;\ y)(c;\ d)=(xc-yd;\ xd+yc)$, $z=(a;\ b)$. Так как $z=uw$, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными находим (см. п. 164) $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Итак,

$$u=(x;\ y)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Получили следующее правило деления комплексных чисел: если $(c;\ d)\neq(0;\ 0)$, то

$$\frac{(a;\ b)}{(c;\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Например,

$$\frac{(2;\ 3)}{(1;\ 4)}=\left(\frac{2\cdot1+3\cdot4}{1^2+4^2};\ \frac{3\cdot1-2\cdot4}{1^2+4^2}\right)=\left(\frac{14}{17};\ -\frac{5}{17}\right).$$

46. Алгебраическая форма комплексного числа. Используя введенные в п. 45 определения сложения и умножения комплексных чисел, легко получить следующие равенства:

$$(0;\ 1)\cdot(0;\ 1)=(-1;\ 0), \tag{1}$$

$$(a;\ b)=(a;\ 0)+(b;\ 0)\cdot(0;\ 1), \tag{2}$$

$$(a;\ 0)+(b;\ 0)=(a+b;\ 0), \tag{3}$$

$$(a;\ 0)\cdot(b;\ 0)=(ab;\ 0). \tag{4}$$

Условимся вместо $(a;\ 0)$ писать просто a, а комплексное число $(0;\ 1)$ обозначать буквой i и называть *мнимой единицей*. Тогда равенство (1) принимает вид $i\cdot i=-1$, т. е.

$$i^2=-1, \tag{5}$$

а равенство (2) — вид

$$(a;\ b)=a+bi. \tag{6}$$

Запись $a+bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа* $z=(a;\ b)$; при этом число a называется *действительной частью* комплексного числа z, а bi — его *мнимой частью*.

Например, $(2;\ -4)=2-4i$; $(3;\ 2)=3+2i$; $-7+\sqrt{3}\cdot i=(-7;\ \sqrt{3})$.

Если мнимая часть комплексного числа $a+bi$ отлична от нуля, то такое число называется *мнимым;* если при этом $a=0$, т. е. число имеет вид bi, то оно называется *чисто мнимым;* наконец, если у комплексного числа $a+bi$ мнимая часть равна нулю, то получается действительное число a.

Алгебраическая форма существенно облегчает выполнение арифметических операций над комплексными числами.

1) *Сложение.* Мы знаем, что

$$(a;\ b)+(c;\ d)=(a+c;\ b+d). \tag{7}$$

Выполнив сложение тех же чисел в алгебраической форме, считая $a+bi$ и $c+di$ обычными двучленами, находим:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (7) и (8), замечаем, что получился верный результат.

2) *Вычитание.* Мы знаем, что

$$(a;\ b)-(c;\ d)=(a-c;\ b-d). \tag{9}$$

Выполнив теперь вычитание тех же чисел в алгебраической форме, считая $a+bi$ и $c+di$ обычными двучленами, находим:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \tag{10}$$

Сравнивая равенства (9) и (10), замечаем, что получился верный результат.

3) *Умножение.* Мы знаем, что

$$(a;\ b)\,(c;\ d)=(ac-bd;\ ad+bc). \tag{11}$$

Выполнив теперь умножение тех же чисел в алгебраической форме, считая $a+bi$ и $c+di$ обычными двучленами, имеем:

$$(a+bi)\,(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2.$$

Воспользуемся тем, что $i^2=-1$ (см. равенство (5)); тогда $bdi^2=-bd$. В результате находим:

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{12}$$

Сравнивая равенства (11) и (12), замечаем, что получился верный результат.

4) *Деление.* Мы знаем, что если $(c;\ d)\neq(0;\ 0)$, то

$$\frac{(a;\ b)}{(c;\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{13}$$

Выполним теперь деление тех же чисел в алгебраической форме, считая $a+bi$ и $c+di$ обычными двучленами, а

$\frac{a+bi}{c+di}$ — обычной дробью. Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$ (предполагая, что значение дроби от этого не изменится), находим:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Итак,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i. \qquad (14)$$

Сравнивая равенства (13) и (14), замечаем, что получился верный результат.

Подводя итоги, приходим к следующему важному практическому выводу: *над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь, что* $i^2=-1$. Чтобы преобразовать в комплексное число дробь вида $\frac{a+bi}{c+di}$, нужно и числитель, и знаменатель дроби умножить на число $c-di$; числа $c+di$ и $c-di$ называются *комплексно-сопряженными.*

Пример 1. Вычислить $(2-i)^2$.

Решение. Применив формулу $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, получим:

$$(2-i)^2=4-4i+i^2=4-4i-1=3-4i.$$

Пример 2. Вычислить $(1+2i)i-\frac{3+2i}{1-i}$.

Решение. 1) $(1+2i)\,i=i+2i^2=-2+i.$

2) $\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3+5i-2}{1+1}=\frac{1+5i}{2}=$
$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\,i.$

3) $(-2+i)-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\,i\right)=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\,i.$

Пример 3. Найти действительные числа x и y, такие, что выполняется равенство $(2x-3yi)(2x+3yi)+4xi=97+8i$.

Решение. Имеем $(2x-3yi)(2x+3yi)=4x^2-9y^2i^2=4x^2+9y^2$. Тогда заданное равенство можно переписать в виде

$$4x^2+9y^2+4xi=97+8i.$$

Так как комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части ($a=c$) и коэффициенты при мнимых частях ($b=d$), то приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2=97, \\ 4x=8, \end{cases}$$

из которой находим $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=2$, $y_2=-3$.

Пример 4. Найти комплексные числа z, удовлетворяющие равенству $z^2=-5+12i$.

Решение. Будем искать комплексное число z в виде $x+yi$. Имеем:

$$(x+yi)^2=-5+12i; \quad x^2+2xyi+y^2i^2=-5+12i;$$
$$x^2-y^2+2xyi=-5+12i.$$

Из последнего равенства следует, что $\begin{cases} x^2-y^2=-5, \\ 2xy=12. \end{cases}$

Эта система имеет два решения (2; 3) и (−2; −3). Значит, $z_1=2+3i$, $z_2=-2-3i$.

Пример 5. Вычислить $(1+2i)^6$.

Решение. Имеем (см. п. 58) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+$
$+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab^5+b^6=$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

Значит, $(1+2i)^6=1^6+6\cdot1^5\cdot(2i)+15\cdot1^4\cdot(2i)^2+$
$+20\cdot1^3\cdot(2i)^3+15\cdot1^2\cdot(2i)^4+6\cdot1\cdot(2i)^5+(2i)^6=1+12i+60i^2+$
$+160i^3+240i^4+192i^5+64i^6$.

Далее, имеем $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\times$
$\times(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$, $i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$.

Значит, $(1+2i)^6=1+12i-60-160i+240+192i-64=$
$=117+44i$.

47. Отыскание комплексных корней уравнений. Пусть $a>0$. Так как $(\sqrt{a}\cdot i)^2=a\cdot i^2=-a$, то $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot i$. Тем самым мы получаем возможность извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Это позволяет находить не только действительные, но и мнимые корни уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $x^2-4x+13=0$.

Решение. Имеем (см. п. 137) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=$
$=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$. Итак, $x_1=2+3i$, $x_2=2-3i$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3=8$.

Решение. Имеем $x^3-8=0$; $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. Значит, либо $x-2=0$, откуда находим $x_1=2$; либо x^2+2x+
$+4=0$, откуда находим $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$. Итак, $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{3}i$, $x_3=-1-\sqrt{3}i$.

ГЛАВА II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Основные понятия

48. Виды алгебраических выражений. Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня и с помощью скобок составляются *алгебраические выражения.*

Примеры алгебраических выражений:

1) $2a^2b-3ab^2(a+b)$; 2) $a+b+\frac{c}{5}$; 3) $\frac{3a^2+3a+1}{a-1}$;

4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3$; 5) $\sqrt{a+b}$; 6) $(\sqrt[3]{2}-x)^4$; 7) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то оно называется *целым.* Из написанных выше целыми являются выражения 1, 2 и 6.

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражения с переменными, то оно называется *дробным.* Так, из написанных выше дробными являются выражения 3 и 4.

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями.* Так, из написанных выше рациональными выражениями являются выражения 1, 2, 3, 4 и 6.

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то такое алгебраическое выражение называется *иррациональным.* Так, из написанных выше иррациональными являются выражения 5 и 7.

Итак, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, разделяются на целые и дробные.

49. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных.* Множество всех допустимых значений переменных называют *областью определения алгебраического выражения.*

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Так, при любых значениях переменных имеют смысл целые выражения 1, 2, 6 из п. 48.

Дробные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают знаменатель в нуль. Так, дробное выражение 3 из п. 48 имеет смысл при всех a, кроме $a=1$, а дробное выражение 4 имеет смысл при всех a, b, c, кроме значений $a=0$, $b=0$.

Иррациональное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, которые обращают в отрицательное число выражение, содержащееся под знаком корня четной степени или под знаком возведения в дробную степень. Так, иррациональное выражение 5 имеет смысл только при тех a, b, при которых $a+b\geqslant 0$, а иррациональное выражение 7 имеет смысл только при $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ (см. п. 48).

Если в алгебраическом выражении переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение называется *значением алгебраического выражения* при выбранных значениях переменных.

Пример. Найти значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{a^2+b}}{2a-b} \text{ при } a=5,\ b=2.$$

Решение. Имеем $\frac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2}=\frac{\sqrt[3]{27}}{10-3}=\frac{3}{8}$.

50. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество. Рассмотрим два выражения $f(x)=x^2-2x$ и $g(x)=4x-5$. При $x=2$ имеем $f(2)=2^2-2\cdot 2=0$; $g(2)=4\cdot 2-5=3$. Числа 0 и 3 называются *соответственными значениями* выражений x^2-2x и $4x-5$ при $x=2$. Найдем соответственные значения тех же выражений при $x=1$:

$$f(1)=1^2-2\cdot 1=-1;\ g(1)=4\cdot 1-5=-1;$$

при $x=0$:

$$f(0)=0^2-2\cdot 0=0;\ g(0)=4\cdot 0-5=-5.$$

Соответственные значения двух выражений могут быть равными друг другу (так, в рассмотренном примере выполняется равенство $f(1)=g(1)$), а могут и отличаться друг от друга (так, в рассмотренном примере $f(2)\neq g(2)$; $f(0)\neq g(0)$).

Если соответственные значения двух выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называются *тождественно равными*.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Так, тождественно равны выражения x^5 и $x^2\cdot x^3$, $a+b+c$ и $c+b+a$, $(2ab)^2$ и $4a^2b^2$.

Примеры тождеств:

$$a+b=b+a,$$
$$a+0=a,$$
$$(a+b)\,c=ac+bc,$$
$$a\cdot 1=a,$$
$$x^5=x^2\cdot x^3.$$

Пропорция (см. п. 30) $\frac{2a}{a-1}=\frac{10a}{5(a-1)}$ есть тождество при всех значениях a, кроме $a=1$, поскольку при $a=1$ знаменатели дробей обращаются в иуль, т. е. дроби ие будут иметь смысла. Замена выражения $\frac{ac}{bc}$ выражением $\frac{a}{b}$ (сократили иа c) есть тождественное преобразование выражения $\frac{ac}{bc}$ при ограничениях: $b\neq 0$, $c\neq 0$. Значит, $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ — тождество при всех значениях переменных, кроме $b=0$, $c=0$. Верные числовые равеиства также называют тождествами.

Замена одиого выражения другим, тождественио равным ему, называется *тождественным преобразованием выражения.*

§ 6. Целые рациональные выражения

51. Одночлены и операции над ними. *Одночленом* называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени перемеиных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными. Например, $3a\cdot(2{,}5a^3)$, $(5ab^2)\cdot(0{,}4c^3d)$, $x^2y\cdot(-2z)\cdot\frac{3}{4}$ — одночлены, тогда как выражения $a+b$, $\frac{ab}{c}$ не являются одиочленами.

Любой одиочлен можно привести *к стандартному виду*, т. е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различиых переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена.* Сумму показателей степеней всех переменных называют *степенью одночлена.*

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый *произведением* исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Приведение одночлена к стандартному виду, умножение одночленов — тождественные преобразования.

Пример 1. Привести к стандартному виду одночлен $3a\cdot(2{,}5a^3)$.

Решение. $3a\cdot(2{,}5a^3)=(3\cdot 2{,}5)\cdot(a\cdot a^3)=7{,}5a^4$.

Пример 2. Выполнить умножение одночленов $24ab^2cd^3$ и $\frac{1}{6}a^2b^3c$.

Решение. $(24ab^2cd^3)\cdot\left(\frac{1}{6}a^2b^3c\right)=\left(24\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot(a\cdot a^2)\cdot(b^2\cdot b^3)\times$

$\times(c\cdot c)\cdot d^3=4a^3b^5c^2d^3$.

Пример 3. Возвести одночлен $(-3ab^2c^3)$ в четвертую степень.

Решение. $(-3ab^2c^3)^4=(-3)^4\cdot a^4\cdot(b^2)^4\cdot(c^3)^4=81a^4b^8c^{12}$.

Одночлены, приведеиные к стандартному виду, называются *подобными*, если они отличаются только коэффициентом или совсем не отличаются. Подобные одночлены можио складывать и вычитать, в результате чего сиова получается одночлеи, подобный исходным (иногда получается 0). Сложение и вычитание подобных одночленов иазывают *приведением подобных членов*.

Пример 4. Выполнить сложение одиочленов $18x^2yz^3$ и $-8x^2yz^3$.

Решение. $18x^2yz^3+(-8x^2yz^3)=(18+(-8))\,x^2yz^3=$

$=10x^2yz^3$.

52. Многочлены. Приведение миогочленов к стандартному виду. *Многочленом* называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде (см. п. 51) и выполнить приведение подобных членов, то получится *многочлен стандартного вида*.

Всякое целое выражеиие можно преобразовать в многочлен стандартного вида — в этом состоит цель преобразований (упрощений) целых выражений.

Рассмотрим примеры, в которых целое выражение нужно привести к стаидартному виду многочлена.

Пример 1. $3a\cdot 5b+3ab+2a\cdot(-4b)+b\cdot b$.

Решение. Сначала приведем к стандартному виду члены многочлена. Получим $15ab+3ab-8ab+b^2$. После приведения подобных членов получим миогочлеи стандартного вида $10ab+b^2$.

Пример 2. $(3a+5b-2c)+(2a-b+4c)$.

Решеиие. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим:

$$3a+5b-2c+2a-b+4c$$

и далее $(3a+2a)+(5b-b)+(-2c+4c)=5a+4b+2c$.

Пример 3. $(5a^2b+ab^2)-(3a^2b-4ab^2)$.

Решение. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим:

$5a^2b+ab^2-3a^2b+4ab^2=(5a^2b-3a^2b)+(ab^2+4ab^2)=2a^2b+$
$+5ab^2$.

Пример 4. $4x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+3\right)$.

Решение. Произведение одночлена и многочлена согласно распределительному закону равно сумме произведений этого одночлена и каждого члена многочлена. Получаем

$$4x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+3\right)=4x^2\cdot x-4x^2\cdot\frac{1}{2}x^2+4x^2\cdot 3=4x^3-2x^4+12x^2.$$

Пример 5. $(a+b)(a-b)$.

Решение. Имеем $(a+b)(a-b)=(a+b)\cdot a+(a+b)\cdot(-b)=$
$=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

Пример 6. $(2x^2y+3xy^2)(2x+3y+1)$.

Решение. Имеем $2x^2y(2x+3y+1)+3xy^2(2x+3y+1)=$
$=(4x^3y+6x^2y^2+2x^2y)+(6x^2y^2+9xy^3+3xy^2)=4x^3y+\underline{6x^2y^2}+$
$+2x^2y+\underline{6x^2y^2}+9xy^3+3xy^2$.

Осталось привести подобные члены (они подчеркнуты). Получим:

$$4x^3y+12x^2y^2+2x^2y+9xy^3+3xy^2.$$

53. Формулы сокращенного умножения. В некоторых случаях приведение целого выражения к стандартному виду многочлена осуществляется с использованием тождеств:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \quad (1)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \quad (2)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \quad (3)$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \quad (4)$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \quad (5)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (6)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \quad (7)$$

Эти тождества называют *формулами сокращенного умножения.*

Рассмотрим примеры, в которых нужно преобразовать заданное выражение в многочлен стандартного вида.

Пример 1. $(3x^2+4y^3)(3x^2-4y^3)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$(3x^2)^2-(4y^3)^2=9x^4-16y^6.$$

Пример 2. $(a+b-c)(a+b+c)$.

Решение. $(a+b-c)(a+b+c)=((a+b)-c)((a+b)+c)=$
$=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$.

Пример 3. $(3a^2-5b^3)^2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим:

$$(3a^2)^2-2\cdot 3a^2\cdot 5b^3+(5b^3)^2=9a^4-30a^2b^3+25b^6.$$

Пример 4. $(3a+1)(9a^2-3a+1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$(3a)^3+1=27a^3+1.$$

54. Разложение многочлеиов на множители. Иногда можно преобразовать многочлен в произведение нескольких сомножителей — многочленов или одпочленов. Такое тождественное преобразование называется *разложением многочлена на множители.* В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих множителей.

Рассмотрим некоторые способы разложения многочленов на множители.

1) *Вынесение общего множителя за скобку.* Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона (для наглядности иужно лишь переписать этот закон «справа налево»):

$$ac+bc=c(a+b).$$

Пример 1. Разложить на множнтели многочлен $28x^3-35x^4$.

Решеиие. $28x^3-35x^4=7x^3\cdot 4-7x^3\cdot 5x=7x^3(4-5x)$.

Обычно при вынесении общего множителя за скобки каждую переменную, входящую во все члены многочлена, выносят с иаименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене. Если все коэффициенты миогочлена — целые числа, то в качестве коэффициеита общего множителя берут наибольший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена.

2) *Использование формул сокращенного умножения.* Формулы (1) — (7) из п. 53, будучи прочитанными «справа налево», во многих случаях оказываются полезными для разложеиия многочленов на множители.

Пример 2. Разложить на множители x^6-1.

Решение. Имеем $x^6-1=(x^3)^2-1^2$. Применив формулу (1) (разиость квадратов), получим $(x^3+1)(x^3-1)$. Применив

теперь формулы (4) и (5) (сумма кубов, разность кубов), получим: $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

Итак,

$$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Пример 3. $4a^4b^3+16a^3b^4+16a^2b^5$.

Решение. Сначала вынесем за скобку общий множитель. Для этого найдем наибольший общий делитель коэффициентов 4, 16, 16 и наименьшие показатели степеней, с которыми переменные a и b входят в составляющие данный многочлен одночлены. Получим:

$$4a^2b^3(a^2+4ab+4b^2).$$

Так как далее по формуле (2) $a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$, то окончательно получаем $4a^4b^3+16a^3b^4+16a^2b^5=4a^2b^3(a+2b)^2$.

3) *Способ группировки.* Он основан на том, что переместительный и сочетательный законы сложения позволяют группировать члены многочлена различными способами. Иногда удается такая группировка, что после вынесения за скобки общих множителей в каждой группе в скобках остается один и тот же многочлен, который в свою очередь как общий множитель может быть вынесен за скобки. Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители.

Пример 4. $x^3-3x^2+5x-15$.

Решение. Произведем группировку следующим образом:

$$(x^3-3x^2)+(5x-15).$$

В первой группе вынесем за скобку общий множитель x^2, во второй — общий множитель 5. Получим $x^2(x-3)+5(x-3)$. Теперь многочлен $(x-3)$ как общий множитель вынесем за скобку: $(x-3)(x^2+5)$. Таким образом, получаем:

$$x^3-3x^2+5x-15=(x-3)(x^2+5).$$

Пример 5. $20x^2+3yz-15xy-4xz$.

Решение. $20x^2+3yz-15xy-4xz=(20x^2-15xy)+(3yz-4xz)=5x(4x-3y)-z(4x-3y)=(4x-3y)(5x-z)$.

Пример 6. $a^2-7ab+12b^2$.

Решение. Здесь никакая группировка не приведет к появлению во всех группах одного и того же многочлена. В таких случаях иногда оказывается полезным представить какой-либо член многочлена в виде некоторой суммы, после чего снова попробовать применить способ группировки. В нашем примере целесообразно представить $-7ab$ в виде суммы $-3ab-4ab$. Получим $a^2-7ab+12b^2=a^2-3ab-4ab+12b^2=(a^2-3ab)-(4ab-12b^2)=a(a-3b)-4b(a-3b)=(a-3b)(a-4b)$.

Пример 7. x^4+4y^4.

Решение. Прибавим и отнимем одночлен $4x^2y^2$. Получим $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=$ $=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$.

55. Многочлены от одной переменной. Многочлен $ax+b$, где a, b — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называется *многочленом первой степени;* многочлен ax^2+bx+c, где a, b, c — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называется *многочленом второй степени* или *квадратным трехчленом;* многочлен ax^3+ $+bx^2+cx+d$, где a, b, c, d — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называется *многочленом третьей степени.*

Вообще если a, b, c, ..., l, m — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, то многочлен

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+lx+m$$

называется *многочленом n-й степени (относительно x)*; ax^n, bx^{n-1}, ..., lx, m — члены многочлена, a, b, c, ..., l, m — коэффициенты, ax^n — *старший член* многочлена, a — коэффициент при старшем члене, m — *свободный член* многочлена. Обычно многочлен записывают по убывающим степеням переменной, т. е. степени переменной x постепенно уменьшаются, в частности, на первом месте стоит старший член, на последнем — свободный член. *Степень многочлена* — это степень старшего члена.

Например, $5x^5-2x^3+3x^2+1$ — многочлен пятой степени, в котором $5x^5$ — старший член, 1 — свободный член многочлена.

Корнем многочлена $P(x)$ называют такое значение x, при котором многочлен обращается в нуль. Например, число 2 является корнем многочлена $P(x)=x^3+2x^2-7x-2$, так как $P(2)=2^3+2\cdot 2^2-7\cdot 2-2=0$.

56. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+ $+bx+c$ (т. е. корни уравнения $ax^2+bx+c=0$), то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Эта формула применяется для *разложения квадратного трехчлена на множители.*

Пример. Разложить на множители $6x^2-x-2$.

Решение. Применив формулу корней квадратного уравнения (см. п. 137) к уравнению $6x^2-x-2=0$, находим $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$. Значит,

$$6x^2-x-2=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=(2x+1)(3x-2).$$

57. Разложение на множители двучлена x^n-a^n. Известно, что

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a), \tag{1}$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2). \tag{2}$$

Если перемножить многочлены $x-a$ и $x^3+x^2a+xa^2+a^3$, то получим:

$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3). \tag{3}$$

Обобщением формул (1), (2), (3) является формула разложения на множители двучлена x^n-a^n:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}).$$

Если, в частности, $a=1$, то получаем:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1).$$

Например, $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

58. Возведение двучлена в натуральную степень *(бином Ньютона)*. В этом пункте речь идет о том, как двучлен (или бином) $a+b$ возвести в любую натуральную степень.

Если $n=1$, то $(a+b)^1=a+b$.

Если $n=2$, то $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Если $n=3$, то $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Воспользовавшись тем, что $(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$, можно вывести формулу

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Вообще справедлива следующая формула *(бином Ньютона)*:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot a^{n-3}b^3+$$

$$+\ \ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n.$$

Пример. Для $(a+b)^6$ по формуле бинома Ньютона получаем:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4+$$

$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab^5+b^6=a^6+6a^5b^2+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^1+$$

$$+6ab^5+b^6.$$

§ 7. Дробные рациональные выражения

59. Рациональная дробь и ее осиовное свойство. Любое дробное выражение (п. 48) можно записать в виде $\frac{P}{Q}$, где P и Q — рациональные выражения, причем Q обязательно содержит переменные. Такую дробь $\frac{P}{Q}$ называют *рациональной дробью.*

Примеры рациональных дробей:

$$\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}, \quad \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}, \quad \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{a-b}.$$

Основное свойство дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}$, справедливым при условиях $R\neq 0$ и $Q\neq 0$; здесь R — целое рациональное выражение. Это значит, что числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличиое от нуля число, одночлен или многочлен.

Например, $\frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}=\frac{12\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)}=$

$=\frac{4x^3-6x^2+12}{3x^2+2x+6}$.

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на -1, получим $\frac{P}{Q}=\frac{-P}{-Q}$. Таким образом, значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак: $\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{Q}$; $\frac{P}{-Q}=-\frac{P}{Q}$.

Значит, $\frac{P}{Q}=-\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{-Q}$.

Например, $\frac{3x-2}{3x+4}=-\frac{-(3x-2)}{3x+4}=-\frac{2-3x}{3x+4}$.

60. Сокращение рациональных дробей. Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби посредством сокращения невозможно.

Пример. Сократить дробь $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}$.

Решение. Имеем $x^2-3xy=x(x-3y)$;
$9y^2-x^2=-(x^2-9y^2)=-(x-3y)(x+3y)$.
Значит, $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}=\frac{x(x-3y)}{-(x-3y)(x+3y)}=-\frac{x}{x+3y}$.

Сокращение дроби выполнено при условии $x-3y\neq 0$.

61. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю. *Общим знаменателем* нескольких рациональных дробей называется целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби (см. п. 54).

Например, общим знаменателем дробей $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{3x-1}{x-2}$ служит многочлен $(x+2)(x-2)$, так как он делится и на $x+2$, и на $x-2$; и многочлен $3(x+2)(x-2)$, и многочлен $x(x+2)(x-2)$, и многочлен $5x^7(x+2)^2(x-2)^3$ и т. д. Обычно берут такой общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на выбранный. Такой простейший знаменатель называют иногда наименьшим общим знаменателем.

В рассмотренном выше примере общий знаменатель равен $(x+2)(x-2)$. Имеем

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)};\quad \frac{3x-1}{x-2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Приведение данных дробей к общему знаменателю достигнуто путем умножения числителя и знаменателя первой дроби на $x-2$, а числителя и знаменателя второй дроби на $x+2$. Многочлены $x-2$ и $x+2$ называются *дополнительными множителями* соответственно для первой и второй дроби. Дополнительный множитель для данной дроби равен частному от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Чтобы несколько рациональных дробей привести к общему знаменателю, нужно:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;

2) составить общий знаменатель, включив в него в качестве сомножителей все множители полученных в п. 1) разложений; если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берется с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;

3) найти дополнительные множители для каждой из дробей (для этого общий знаменатель делят на знаменатель дроби);

4) домножив числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель, привести дробн к общему знаменателю.

Пример. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{12a^2-12b^2};\ \frac{b}{18a^3+18a^2b};\ \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

Решение. Разложим знаменатели на множители:

$$12a^2-12b^2=12(a-b)(a+b);$$
$$18a^3+18a^2b=18a^2(a+b);$$
$$24a^2-24ab=24a(a-b).$$

В общий знаменатель надо включить следующие множители: $(a-b)$, $(a+b)$, a^2 — и наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 24, т. е. К(12, 18, 24)=72. Значит, общий знаменатель имеет вид $72a^2(a-b)(a+b)$.

Дополнительные множители: для первой дроби $6a^2$, для второй $-4(a-b)$, для третьей $-3a(a+b)$. Значит, получаем:

$$\overbrace{}^{6a^2}\ \frac{a}{12a^2-12b^2}=\frac{8a^3}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\overbrace{}^{4(a-b)}\ \frac{b}{18a^3+18a^2b}=\frac{4b(a-b)}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\overbrace{}^{3a(a+b)}\ \frac{a+b}{24a^2-24ab}=\frac{3a(a+b)^2}{72a^2(a-b)(a+b)}.$$

62. Сложение и вычитание рациональных дробей. *Сумма* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей с одинаковыми знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей складываемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q}+\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1+P_2}{Q}.$$

Аналогично обстоит дело в случае вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{P_1}{Q}-\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1-P_2}{Q}.$$

Пример 1. Упростить выражение $\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}$.

Решение. $\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}=\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^3-xy+y^2)}{x+y}=$

$=x^2-xy+y^2.$

Для сложения или вычитания рациональных дробей с разными знаменателями нужно прежде всего привести дроби к общему знаменателю, а затем выполнить операции над полученными дробями с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Упростить выражение $\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x}$.

Решение. Имеем $2x^2+2x=2x(x+1)$; $x^2-1=$
$=(x-1)(x+1)$.

Значит, $\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^3-1}-\frac{2}{x}=\overset{x-1}{\frac{3}{2x(x+1)}}+\overset{2x}{\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}}-$

$-\overbrace{\frac{2}{x}}^{2(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)+2x(2x-1)-4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)}=$

$=\frac{1}{2x(x-1)}.$

63. Умножение и деление рациональных дробей. *Произведение* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2}.$$

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1}:\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot Q_2}{Q_1\cdot P_2}.$$

Сформулированные правила умножения и деления распространяются и на случай умножения или деления на многочлен: достаточно записать этот многочлен в виде дроби со знаменателем 1.

Учитывая возможность сокращения рациональной дроби, полученной в результате умножения или деления рациональных дробей, обычно стремятся до выполнения этих операций разложить на множители числители и знаменатели исходных дробей.

Пример 1. Выполнить умножение $\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}$.

Решение. Имеем

$$\frac{x^3+2x+1}{18x^3}=\frac{(x+1)^2}{18x^3};\quad \frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Использовав правило умножения дробей, получаем:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2\cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

Пример 2. Выполнить деление $\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

Решение. Имеем $\frac{a^3-2a^2}{3a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)}$; $\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=$

$$=\frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}.$$

Использовав правило деления, получаем:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

64. Возведение рациональной дроби в целую степень. Чтобы возвести рациональную дробь $\frac{P}{Q}$ в натуральную степень n, нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби; первое выражение — числитель, а второе выражение — знаменатель результата:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

Пример 1. Преобразовать в дробь степень $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$.

Решение. $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3=\frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3}=\frac{8x^6y^9}{27z^{15}}$.

При возведении дроби в целую отрицательную степень используется тождество $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n}=\left(\frac{Q}{P}\right)^{n}$, справедливое при всех значениях переменных, при которых $P\neq 0$ и $Q\neq 0$.

Пример 2. Преобразовать в дробь выражение

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}.$$

Решение.

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}=\left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2(a-b)^3}\right)^{5}=\frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10}(a-b)^{15}}.$$

65. Преобразование рациональных выражений. Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в натуральную степень. Всякое рациональное выражение можно преобразовать в дробь, числитель и знаменатель которой — целые рациональные выражения; в этом, как правило, состоит цель тождественных преобразований рациональных выражений.

Пример. Упростить выражение

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)^{-1}+\frac{8a^2}{2a+b}.$$

Решение.

1) $\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}=\frac{2a}{2a+b}\overset{2a+b}{-}\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$

$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2}$;

2) $\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}\overset{2a+b}{-}\frac{1}{2a-b}=$

$=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)}$;

3) $\left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)}\right)^{-1}=-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}$;

4) $\frac{2ab}{(2a+b)^2}\cdot\left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}\right)=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2}=$

$=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b}$;

5) $\frac{2ab-4a^2}{2a+b}+\frac{8a^2}{2a+b}=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=\frac{2a(2a+b)}{2a+b}=2a.$

§ 8. Иррациональные выражения

66. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов). При преобразовании арифметических корней используются их свойства (см. п. 35).

Рассмотрим несколько примеров на применение свойств арифметических корней для простейших преобразований радикалов. При этом все переменные будем считать принимающими только неотрицательные значения.

Пример 1. Извлечь корень из произведения $\sqrt[3]{a^3b^9}$.

Решение. Применив свойство 1^0, получим:

$$\sqrt[3]{a^3b^9}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^9}=ab^3.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt{45a^5}$.

Решение. $\sqrt{45a^5}=\sqrt{9a^4 5a}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{5a}=3a^2\sqrt{5a}$.

Такое преобразование называется *вынесением множителя из-под знака корня*. Цель преобразования — упростить подкоренное выражение.

Пример 3. Упростить $(\sqrt[3]{a^2})^5$.

Решение. По свойству 3^0 имеем $(\sqrt[3]{a^2})^5=\sqrt[3]{(a^2)^5}=\sqrt[3]{a^{10}}$. Обычно стараются подкоренное выражение упростить, для чего выносят множители за знак корня. Имеем $\sqrt[3]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^9\cdot a}=$ $=\sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a}=a^3\sqrt[3]{a}$.

Итак, $(\sqrt[3]{a^2})^5=a^3\sqrt[3]{a}$.

Пример 4. Упростить $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Преобразуем выражение, $x^2\sqrt[3]{x}$, внеся множитель под знак корня: $x^2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(x^2)^3}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6x}=$ $=\sqrt[3]{x^7}$. По свойству 4^0 имеем $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}=\sqrt[12]{x^7}$.

Пример 5. Упростить $\sqrt[30]{2^9}$.

Решение. По свойству 5^0 мы имеем право показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же натуральное число. Если в рассматриваемом примере разделить указанные показатели на 3, то получим $\sqrt[30]{2^9}=\sqrt[10]{2^3}=\sqrt[10]{8}$.

Пример 6. Упростить выражения: а) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$; б) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$; в) $\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}$.

Решение. а) По свойству 1^0 получаем, что для перемножения корней одной и той же степени достаточно перемножить подкоренные выражения и из полученного результата извлечь корень той же степени. Значит, $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5]{a\cdot a^2}=$ $=\sqrt[5]{a^3}$.

б) Прежде всего мы должны привести радикалы к одному показателю. Согласно свойству 5^0 мы можем показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число. Поэтому $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$. Далее имеем $\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^3}$. А теперь в полученном результате разделив показатели корня и степени подкоренного выражения на 3, получим $\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$.

Итак, $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt{a}$.

в) Приведем радикалы к одному показателю. Для этого, очевидно, иужно найти иаименьшее общее кратное чисел 8 и 12, т. е. $K(8, 12)=24$. Значит, нам нужно показатели корня и степени подкорениого выражения для первого из перемножаемых радикалов умножить на 3, а для второго — на 2. Получим:

$$\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}=\sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{14}}=\sqrt[24]{x^9\cdot x^{14}}=\sqrt[24]{x^{23}}.$$

На практике при выполнении действий над радикалами довольно часто переходят к дробным показателям. Например:

$$\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}=x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{7}{12}}=x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}}=x^{\frac{23}{24}}=\sqrt[24]{x^{23}}.$$

67. Тождество $\sqrt{a^2}=|a|$. Упростим выражение $\sqrt{a^2}$. Здесь могут представиться два случая: $a\geqslant 0$ или $a<0$. Если $a\geqslant 0$, то $\sqrt{a^2}=a$; например, $\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{27^2}=27$, $\sqrt{0^2}=0$. Если же $a<0$, то $\sqrt{a^2}=-a$; например, $\sqrt{(-2)^2}=-(-2)=2$. Итак,

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Но точно так же определяется модуль действительного числа (см. п. 26). Таким образом,

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Например, $\sqrt{3^2}=|3|=3$; $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=-(-5)=5$. Вообще если n — четное число, т. е. $n=2k$, то

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

Пример. Упростить выражение $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$.

Решение. Имеем $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$. Поскольку заданиое выражение содержит слагаемое $\sqrt{2-x}$, то $2-x\geqslant 0$, откуда находим, что $x\leqslant 2$. Значит, $x-3<0$, а потому $|x-3|=-(x-3)=3-x$. Итак, $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$, и мы получаем:

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=3-x+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}.$$

68. Преобразование иррациональных выражений. Для преобразования иррациональных выражений используются свойства радикалов (см. п. 35) и свойства степени с рациональным показателем (см. п. 38).

Пример. Упростить выражение

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\left(x^0+\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^3}-1)}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{x}.$

2) $-\sqrt[4]{x}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{-\sqrt[4]{x}\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}.$

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\dfrac{1^2}{(\sqrt[4]{x})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

4) $x^0+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}.$

5) $\left(\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Итак, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Обычно стараются записать ответ так, чтобы в знамеиателе не содержалась иррациональность. Для избавления от иррациоиальности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ умножим и числитель, и знаменатель на $\sqrt{x}-1$ — это выражение называется *сопряженным* для выражения $\sqrt{x}+1$. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x^2})-1^2}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

Глава III. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 9. Свойства функций

69. Определение функции. Зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*. Значение y, соответствующее заданному значению x, называют *значением функции*.

Записывают: $y=f(x)$ (читается: «Эф от икс»). Буквой f обозначается данная функция, т. е. функциональная зависимость между переменными x и y; $f(x)$ есть значение функции, соответствующее значению аргумента x. Говорят также, что $f(x)$ есть значение функции *в точке* x.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*.

Все значения, которые принимает функция $f(x)$ (при x, принадлежащих области ее определения), образуют *область значений функции*.

Рассмотрим функцию $y=x^2$, где $1 \leqslant x \leqslant 3$. Эта запись означает, что задана следующая функция: каждому числу x из отрезка [1, 3] ставится в соответствие квадрат этого числа. Например, $f(1)=1^2=1$, $f(2)=2^2=4$, $f(2{,}3)=2{,}3^2=5{,}29$ и т. д. Запись $f(4)$ в этом случае лишена смысла, так как число 4 не принадлежит отрезку [1, 3]. Отрезок [1, 3] — область определения функции.

70. Аналитическое задание функции. Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы $y=f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x. Б таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана *аналитически*.

Пример 1. $y=x^2+5x-1$, где $x \geqslant 0$. Область определения этой функции — луч $[0; +\infty)$. Чтобы найти значение функции в любой точке $x \geqslant 0$, достаточно найти числовое значение выражения x^2+5x-1 в выбранной точке. Функция задана аналитически.

Для аналитически заданной функции иногда не указывают явно область определения функции. В таком случае подразумевают, что область определения фуикции $y=f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$, т. е. с множеством тех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Пример 2. Функция $y=f(x)$ задана аналитически формулой $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4+3}$. Найти: а) $f(-x)$; б) $f(kx)$; в) $f(x+a)$; г) $f(|x|)$.

Решение. а) Чтобы найти $f(-x)$, надо в $f(x)$ всюду вместо x подставить $(-x)$. Получим:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+(-x)+1}{(-x)^4+3}=\frac{x^2-x+1}{x^4+3}.$$

Итак,

$$f(-x)=\frac{x^2-x+1}{x^4+3}.$$

б) $f(kx)=\frac{(kx)^2+(kx)+1}{(kx)^4+3}=\frac{k^2x^2+kx+1}{k^4x^4+3}$.

в) $f(x+a)=\frac{(x+a)^2+(x+a)+1}{(x+a)^4+3}$.

г) $f(|x|)=\frac{|x|^2+|x|+1}{|x|^4+3}=\frac{x^2+|x|+1}{x^4+3}$.

Пример 3. Найти область определения функции $y=\frac{1}{x+2}$.

Решение. Выражение $\frac{1}{x+2}$ определено при всех x, кроме того значения, которое обращает знаменатель в 0,— это значение $x=-2$. Значит, область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x=-2$.

Пример 4. Найти область определения функции $y=\sqrt{x-1}$.

Решение. Выражение $\sqrt{x-1}$ определено при тех x, при которых $x-1\geqslant 0$, т. е. при $x\geqslant 1$. Значит, область определения функции — луч $[1;\ +\infty)$

Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами, например:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+2, \text{ если } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Эта функция определена на отрезке $[-1;\ 1]$. Для вычисления значений функции нужно лишь точно определить, какой формулой следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента. Например, если нужно вы-

числить $f(0{,}5)$, воспользуемся равенством $f(x)=x+2$ и получим $f(0{,}5)=2{,}5$. Если же нужно вычислить $f(-0{,}5)$, то воспользуемся равенством $f(x)=2x+3$, получим $f(-0{,}5)=2$.

71. Табличное задание функции. На практике часто используется *табличный* способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов, таблица квадратных корней.

Во многих случаях табличное задание функции оказывается удобным. Оно позволяет найти значения функции для значений аргумента, имеющихся в таблице, без всяких вычислений. На практике часто зависимость одной величины от другой находят опытным путем. В этом случае одной величине придают определенные значения, а потом из опыта для каждого из таких значений находят значение (обычно приближенное) второй величины. Таким образом опыт позволяет составить некоторую таблицу значений функции. Существуют методы, позволяющие по такой таблице подбирать формулы, задающие функции (с определенной точностью).

72. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат. Множество всех пар[1] действительных чисел называется *числовой плоскостью.*

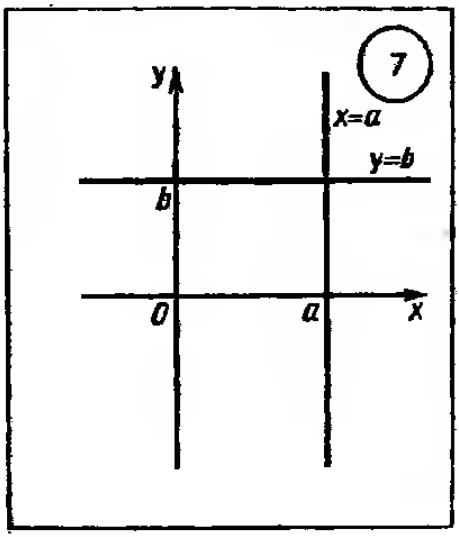
Как для множества всех действительных чисел (или числовой прямой) есть геометрическая модель — координатная прямая (п. 18, 21), так и для множества всех пар действительных чисел (числовой плоскости) есть геометрическая модель — координатная плоскость. *Координатная плоскость* xy определяется двумя взаимно перпендикулярными координатными прямыми с общим началом O и одинаковым масштабом (рис. 7). Точка O называется *началом координат.* Горизонтальная прямая называется *осью абсцисс* или осью x, вертикальная — *осью ординат* или осью y.

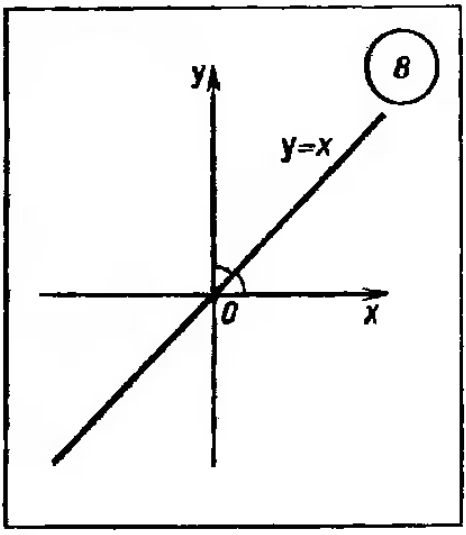
Если отметить на координатной плоскости все точки с абсциссой $x=a$, то получится прямая, параллельная оси y (рис. 7); говорят, что $x=a$ — уравнение этой прямой. Если отметить на координатной плоскости все точки с ординатой $y=b$, то получится прямая, параллельная оси x (рис. 7); говорят, что $y=b$ — уравнение этой прямой.

73. График функции, заданной аналитически. Пусть функция задана аналитически формулой $y=f(x)$. Если на коорди-

---

[1] Под парой чисел понимают два числа, которые рассматриваются в определенном порядке.





натной плоскости отметить все точки, обладающие следующим свойством: абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции, то множество точек $(x;\ f(x))$ есть *график функции*.

Например, графиком функции $y=x$ является множество точек вида $(x;\ x)$, т. е. точек, имеющих одинаковые координаты. Это множество точек есть биссектриса I и III координатных углов (рис. 8).

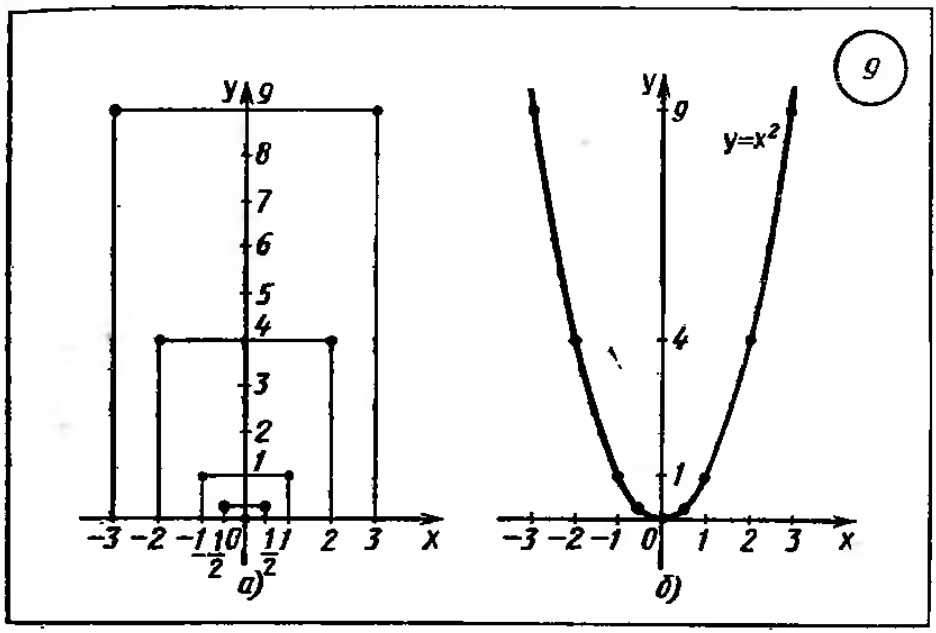
На практике для построения графика функции составляют таблицу значений функции при некоторых значениях аргумента, наносят на плоскость соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагают, что график функции является плавной линией, а найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции.

Пример. Построить график функции $y=x^2$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функции:

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	$2{,}5$
y	$6{,}25$	4	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	4	$6{,}25$

Нанесем найденные точки (0; 0); (0,5; 0,25); (—0,5; 0,25); (1; 1); (—1; 1); (2; 4); (—2; 4); (3; 9); (—3; 9) на координатную плоскость (рис. 9,*а*). Соединив эти точки плавной линией, получим график (а точнее, эскиз графика) функции $y=x^2$ (рис. 9,*б*). Эта линия называется *параболой*. Вообще параболой



является график любой функции вида $y=ax^2$, где $a\neq 0$ (см. п. 111).

74. Четные и нечетные функции. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Например, $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$ — четные функции, а $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^7$ — нечетные функции.

Если функция $y=f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x)\neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x)\neq f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Из определения следует, что область определения X как четной, так и нечетной функции должна обладать следующим свойством: если $x\in X$, то и $-x\in X$ (т. е. X — симметричное относительно O множество).

Пример. Исследовать на четность функции: а) $y=x^{20}$; б) $y=x^{13}$; в) $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение. а) Имеем $f(x)=x^{20}$, $f(-x)=(-x)^{20}=x^{20}$. Значит, $f(-x)=f(x)$ для всех x. Функция является четной.

б) Имеем $f(x)=x^{13}$, $f(-x)=(-x)^{13}=-x^{13}$. Значит, $f(-x)=-f(x)$ для всех x. Функция является нечетной.

в) Имеем $f(x)=\frac{x-4}{x^2-9}$, $f(-x)=\frac{-x-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}$. Так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то функция не является ии четной, ни иечетной.

75. График четной функции. График нечетной функции. Графики четной и нечетной функций обладают следующими особенностями:

Если функция является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Если функция является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пример 1. Построить график функции $y=|x|$.

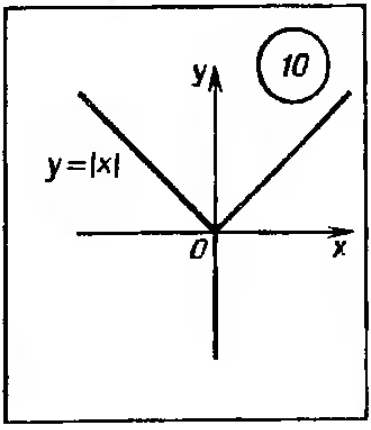
Решение. Имеем $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$. Значит, функция четна, а потому график ее симметричен относительно оси ординат.

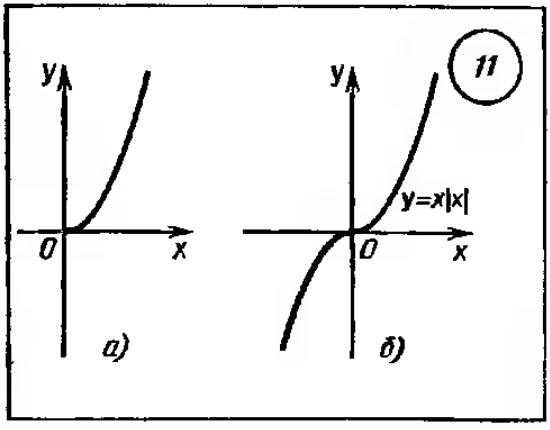
Если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$, т. е. при $x\geqslant 0$ имеем $y=x$. Графиком функции $y=x$ при $x\geqslant 0$ служит биссектриса первого координатного угла. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно оси y, получим график функции $y=|x|$ (рис. 10).

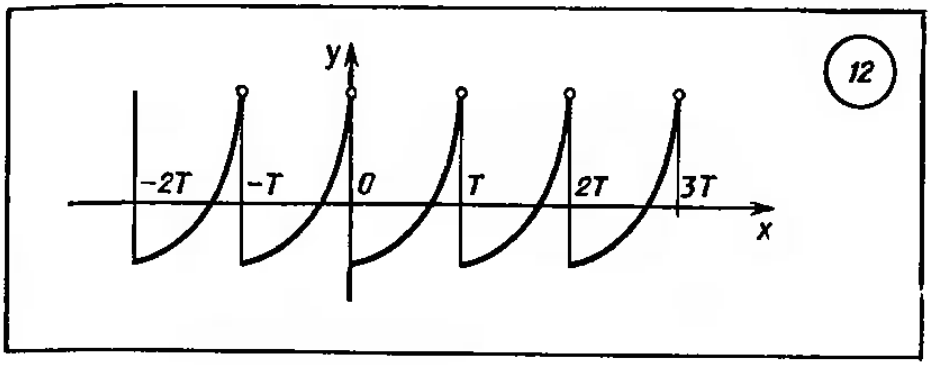
Пример 2. Построить график функции $y=x\,|x|$.

Решение. Имеем $f(-x)=(-x)\,|-x|=-x\,|x|=-f(x)$. Значит, функция иечетна, а потому график ее симметричен относительно начала координат.

Если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$, а $f(x)=x\cdot|x|=x\cdot x=x^2$. Значит, при $x\geqslant 0$ имеем $y=x^2$. Графиком будет ветвь параболы. Она изображена иа рисунке 11,*а*. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно начала координат, получим график функции $y=x\,|x|$ (рис. 11,*б*).







76. Периодические функции. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

Число T называется *периодом функции* $y=f(x)$.

Из этого определения сразу следует, что если T — период функции $y=f(x)$, то $2T$, $3T$, $4T$, $-T$, $-2T$, $-3T$, $-4T$ — периоды функции. Значит, у периодической функции бесконечно много пернодов. Если, например, T — период функции, то и число вида kT, где k — любое целое число, также является периодом фуикции.

Чаще всего (но не всегда) среди множества положительных периодов функции можно найти иаименьший. Его называют *основным периодом*.

Графики периодических функций обладают следующей особенностью. Если T — основной период функции $y=f(x)$, то для построения ее графика достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков оси x длиной T, а затем осуществить параллельный перенос этой ветви по оси x на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$,... (рис. 12). Чаще всего в качестве такого промежутка длиной T выбирают промежуток с концами в точках $\left(-\frac{T}{2};\ 0\right)$ и $\left(\frac{T}{2};\ 0\right)$ или $(0;\ 0)$ и $(T;\ 0)$.

Примеры пернодических функций:

$y=\{x\}$ — основной период $T=1$ (см. п. 93),

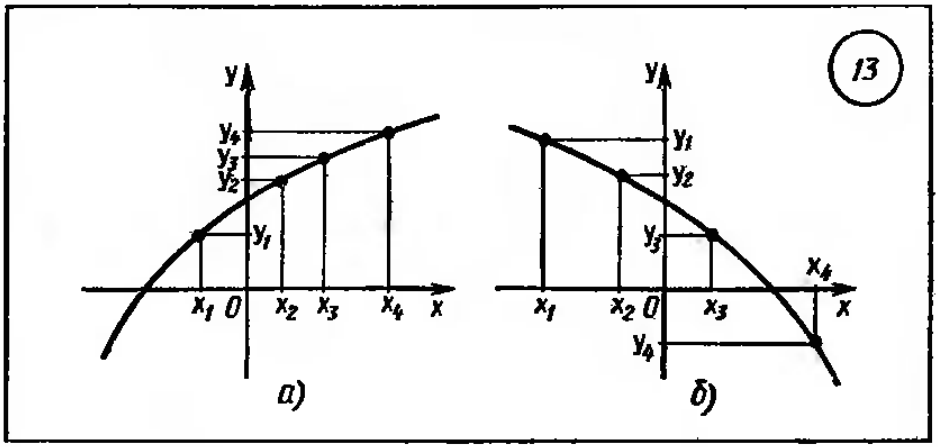
$y=\sin x$ — осиовной период $T=2\pi$ (см. п. 102),

$y=\cos x$ — основной период $T=2\pi$ (см. п. 103),

$y=\operatorname{tg} x$ — основной период $T=\pi$ (см. п. 104),

$y=\operatorname{ctg} x$ — основной период $T=\pi$ (см. п. 105).

77. Монотонные функции. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей на промежутке* X, если для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_1<x_2$, выполияется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (короче: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$). Функция $y=f(x)$ называется *убывающей на промежутке* X, если для любых x_1 и x_2 из X,



таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (короче: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$). Иными словами, функция возрастает (убывает) на промежутке X, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 13, *а*), а ордината графика убывающей функции уменьшается (рис. 13, *б*).

Возрастающие и убывающие функции объединяются термином «*монотонные* функции».

Пример. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 + 3$.

Решение. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств (см. п. 24) имеем $x_1^3 < x_2^3$, $2x_1^3 < 2x_2^3$, $2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что функция $y = 2x^3 + 3$ возрастает на всей числовой прямой.

§ 10. Виды функций

78. Постоянная функция. *Постоянной* называется функция, заданная формулой $y = b$, где b — некоторое число.

Графиком постоянной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0; b)$ на оси ординат. На рисунке 14 изображены графики нескольких постоянных функций. В частности, графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

79. Прямая пропорциональность. *Прямой пропорциональностью* называется функция, заданная формулой $y = kx$, где

$k \neq 0$. Число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Перечислим свойства функции $y = kx$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) $y = kx$ — нечетная функция $(f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x))$.

3) При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Т.3.1. | **График прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.**

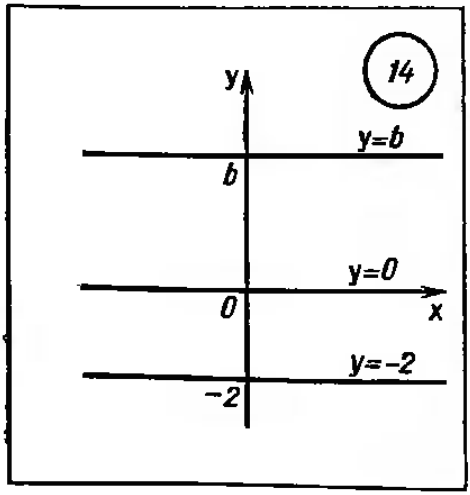
Доказательство

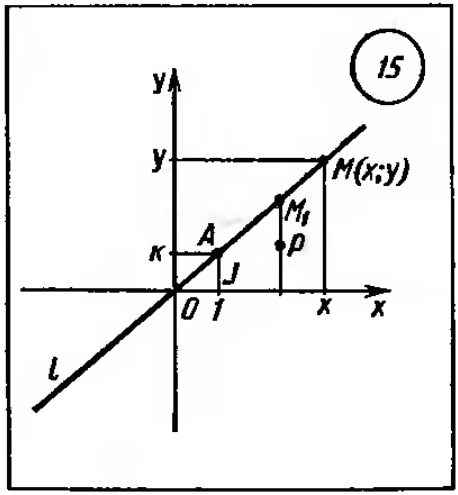
Проведем прямую через начало координат и точку $A(1; k)$ и докажем, что она является графиком функции $y = kx$.

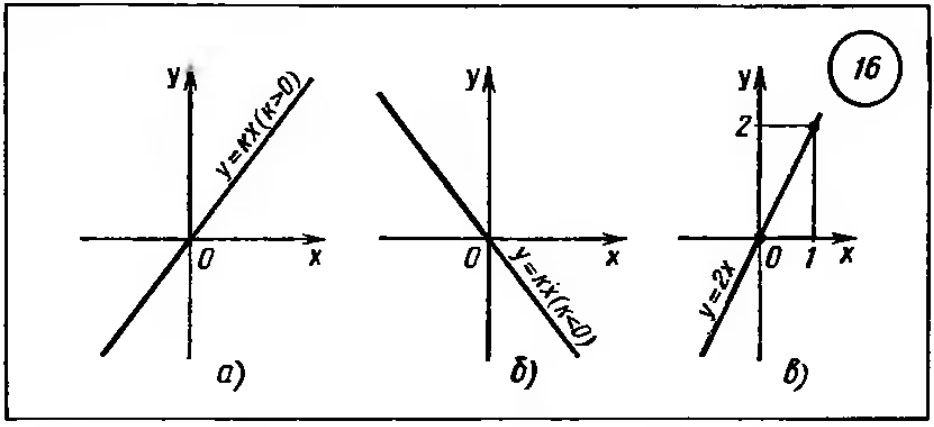
Рассмотрим сначала случай, когда $k > 0$ (рис. 15).

Возьмем любую точку $M(x; y)$, лежащую на прямой l. Из подобия треугольников OAJ и OMx заключаем, что $\frac{Mx}{AJ} = \frac{Ox}{OJ}$, т. е. $\frac{y}{k} = \frac{x}{1}$, откуда $y = kx$. Возьмем теперь точку $P(x; y)$, не лежащую на прямой l. Тогда координаты точки M_1 с той же абсциссой, но лежащей на прямой l, удовлетворяют уравнению $y = kx$, значит, координаты точки P этому уравнению не удовлетворяют. Итак, точки прямой l, и только они, удовлетворяют формуле $y = kx$, значит, прямая l — график функции $y = kx$.

Рассмотрим теперь случай, когда $k < 0$. Возьмем две функции $y = kx$ и $y = -kx$. При одной и той же абсциссе x ординаты графиков этих функций равны по модулю, но противоположны по знаку. Значит, графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Но $-k > 0$, и по доказанному выше графиком функции $y = -kx$ является прямая. Поскольку при преобразовании симметрии прямая переходит в прямую, то и графиком функции $y = kx$ является прямая.







На рисунке 16, *а* изображен график функции $y=kx$ при $k>0$, а на рисунке 16, *б* — график функции $y=kx$ при $k<0$.

Пример. Построить график функции $y=2x$.

Решение. Мы знаем, что графиком является прямая, проходящая через начало координат. Для ее построения достаточно найти одну точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через начало координат и найденную точку. В качестве такой точки выберем точку (1; 2) (если $x=1$, то $y=2\cdot 1=2$). График функции $y=2x$ изображен на рисунке 16, *в*.

80. Линейная функция. *Линейной функцией* называется такая функция, которая задана формулой $y=kx+b$, где k и b — действительные числа. Если, в частности, $k=0$, то получаем постоянную функцию $y=b$; если $b=0$, то получаем прямую пропорциональность $y=kx$.

Перечислим свойства линейной функции $y=kx+b$ при $k\neq 0$, $b\neq 0$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) Функция $y=kx+b$ ни четна, ни нечетна.

3) При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

Т.3.2. Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая.

Доказательство

Если $k=0$, то получаем постоянную функцию $y=b$, ее графиком является прямая, параллельная оси x (см. п. 78).

Если $b=0$, то получаем прямую пропорциональность $y=kx$, ее графиком по теореме 3.1 является прямая, проходящая через начало координат (см. п. 79).

Пусть $k \neq 0$ и $b \neq 0$. Если точка $(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y=kx$ (т. е. выполняется равенство $y_1=kx_1$), то точка $(x_1; y_1+b)$ принадлежит графику функции $y=kx+b$ (т. е. выполняется равенство $y_1+b=kx_1+b$). Но преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x_1; y_1)$ переходит в точку $(x_1; y_1+b)$, является параллельным переносом (см. п. 112), а при параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую.

Итак, графиком функции $y=kx+b$ является прямая, параллельная графику прямой пропорциональности $y=kx$.

На рисунке 17 изображен график функции $y=kx+b$. Это прямая, параллельная прямой, служащей графиком функции $y=kx$, и проходящая через точку $(0; b)$ на оси ординат.

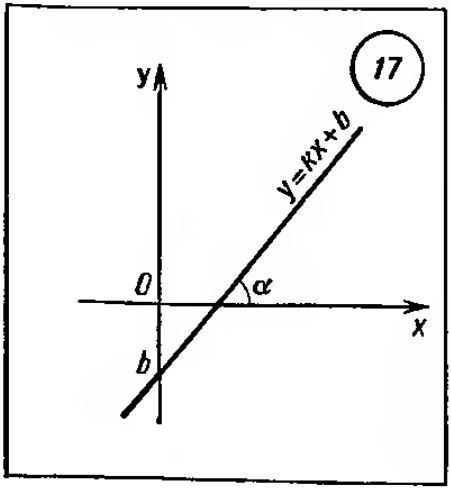
Число k называется *угловым коэффициентом прямой*, оно равно тангенсу угла α между прямой и положительным лучом оси x, т. е. $k=\operatorname{tg}\alpha$.

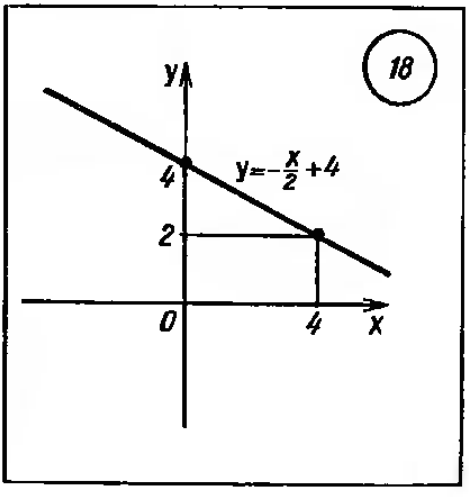
Пример. Построить график функции $y=-\frac{x}{2}+4$.

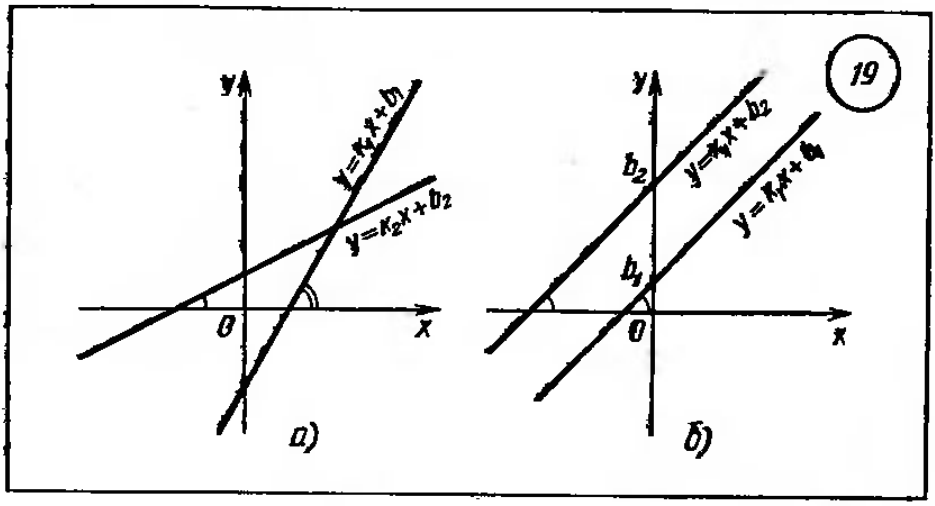
Решение. Графиком линейной функции является прямая, а для построения прямой достаточно знать две точки графика. Заполним таблицу:

x	0	4
y	4	2

(аргументу x дали значения 0 и 4 и по формуле $y=-\frac{x}{2}+4$ нашли соответствующие значения y). Отметим на координатной плоскости точки (0; 4) и (4; 2) и проведем через эти точки прямую (рис. 18).







81. Взаимное расположение графиков линейных функций. Пусть даны две линейные функции $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Их графиками служат прямые (см. п. 80). Эти прямые *пересекаются*, если $k_1\neq k_2$ (рис. 19, *а*). Прямые *параллельны*, если $k_1=k_2$. Последний случай, в свою очередь, можно разбить на два: если $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$, то прямые *совпадают*; если $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$, то прямые *параллельны и не совпадают* (рис. 19, *б*).

82. Обратная пропорциональность. *Обратной пропорциональностью* называют функцию, заданную формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k\neq 0$. Число k называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Перечислим свойства функции $y=\frac{k}{x}$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме нуля.

2) $y=\frac{k}{x}$ — нечетная функция (поскольку $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$).

3) Если $k>0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$ и на промежутке $(-\infty;0)$. Если $k<0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty;0)$ и на промежутке $(0;+\infty)$.

Построим график функции $y=\frac{1}{x}$. Сначала построим ветвь

графика на промежутке $(0; +\infty)$. Составим таблицу значений функции:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 20, *а*). Это и будет ветвь графика функции $y=\frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

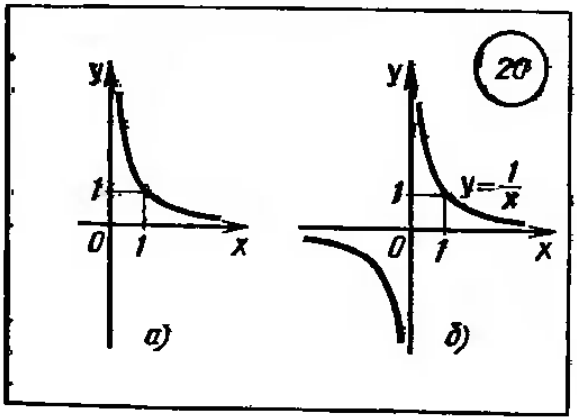
Воспользовавшись нечетностью функции $y=\frac{1}{x}$, добавим к построенной ветви ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 20, *б*).

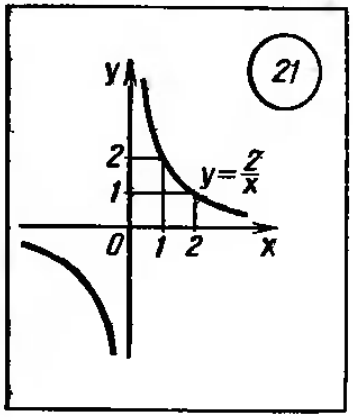
Аналогичный вид имеет график функции $y=\frac{k}{x}$ при любом положительном k. На рисунке 21 изображен график функции $y=\frac{2}{x}$.

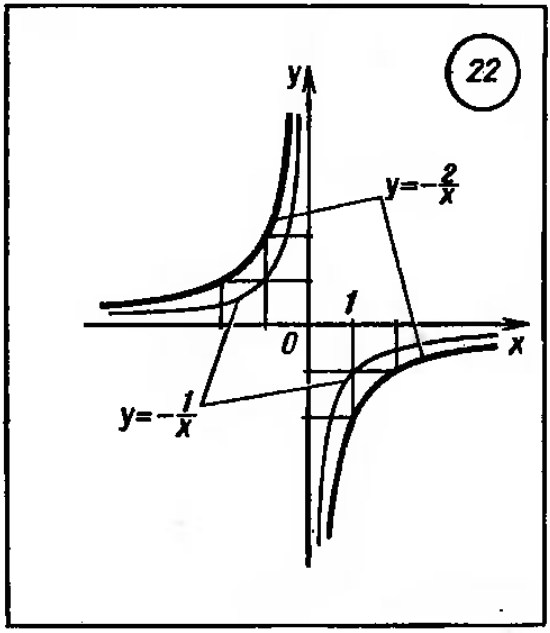
Если $k<0$, то ветви графика обратной пропорциональности расположены не в I и III координатных четвертях, как в случае, когда $k>0$, а во II и IV. На рисунке 22 изображены графики функций

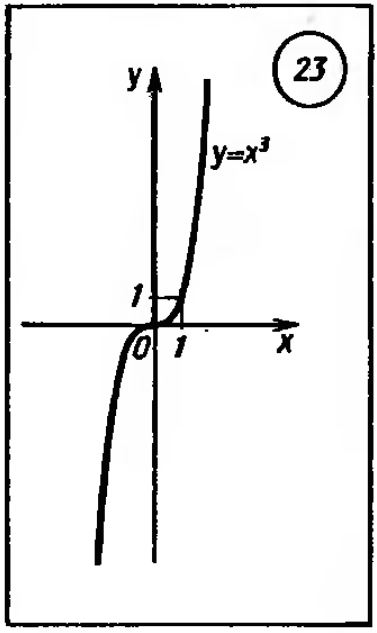
$$y=-\frac{1}{x}, \quad y=-\frac{2}{x}.$$

График обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ называют *гиперболой*.









83. Функция $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y=x^2$ — четная функция ($f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$).

3) На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает.

В самом деле, если $0\leqslant x_1<x_2$, то $x_1^2<x_2^2$, а это и означает возрастание функции (см. п. 77).

4) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.

В самом деле, если $x_1<x_2\leqslant 0$, то $-x_1>-x_2\geqslant 0$, а потому $(-x_1)^2>(-x_2)^2$, т. е. $x_1^2>x_2^2$, а это и означает убывание функции (см. п. 77).

Графиком функции $y=x^2$ является *парабола* (см. п. 73). Этот график изображен на рисунке 9.

84. Функция $y=x^3$. Перечислим свойства функции $y=x^3$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y=x^3$ — нечетная функция ($f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$).

3) Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y=x^3$ изображен на рисунке 23. Он называется *кубической параболой*.

85. Степенная функция с натуральным показателем. Функция $y=x^n$, где n — натуральное число, называется *степенной функцией с натуральным показателем*. При $n=1$ полу-

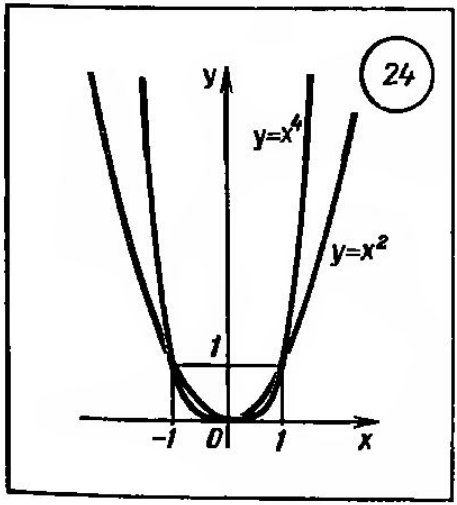
чаем функцию $y=x$, ее свойства рассмотрены в п. 79, а график (прямая) изображен на рисунке 8. При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$, ее свойства рассмотрены в п. 83, а график (парабола) изображен на рисунке 9. При $n=3$ получаем функцию $y=x^3$, ее свойства рассмотрены в п. 84, а график (кубическая парабола) изображен на рисунке 23.

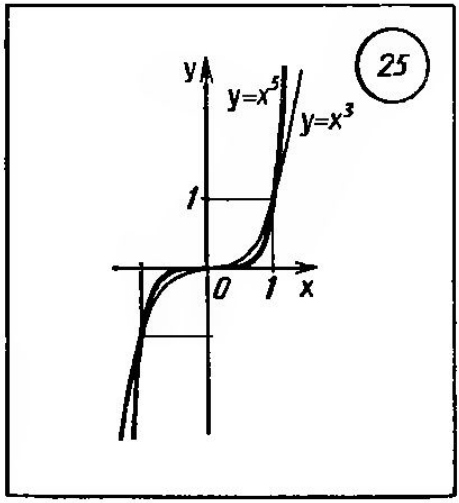
Пусть n — произвольное четное натуральное число, большее двух: $n=4, 6, 8, \ldots$. В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|x|>1$ тем круче идут вверх, чем больше n, а при $|x|<1$ тем «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n (рис. 24).

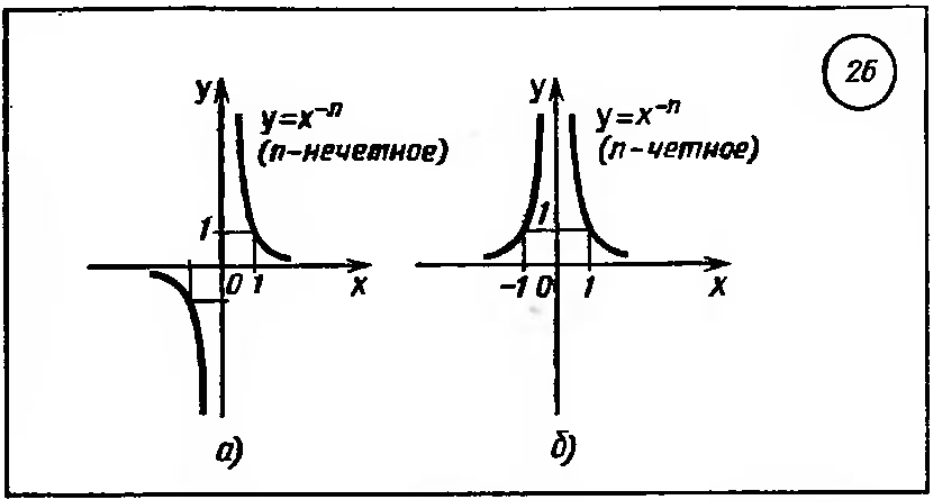
Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех: $n=5, 7, 9, \ldots$. В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n) (рис. 25). Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдаляется от оси x с ростом x, чем больше n.

86. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n — натуральное число. При $n=1$ получаем $y=x^{-1}$ или $y=\frac{1}{x}$. Свойства этой функции рассмотрены в п. 82, а ее график (гипербола) изображен на рисунке 20, *б*.

Пусть n — нечетное число, большее единицы, $n=3, 5, 7, \ldots$. В этом случае функция $y=x^{-n}$ обладает в основном теми же свойствами, что и функция $y=\frac{1}{x}$. График функции $y=x^{-n}$







($n=3, 5, 7, \ldots$) напоминает график функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 26, *а*).

Пусть n — четное число, например $n=2$. Перечислим некоторые свойства функции $y=x^{-2}$, т. е. функции $y=\frac{1}{x^2}$.

1) Функция определена при всех $x\neq 0$.

2) $y=\frac{1}{x^2}$ — четная функция.

3) $y=\frac{1}{x^2}$ убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.

Теми же свойствами обладают любые функция вида $y=x^{-n}$ при четном n, большем двух.

График функции $y=\frac{1}{x^2}$ изображен на рисунке 26, *б*. Аналогичный вид имеет график функции $y=x^{-n}$, если $n=4, 6, \ldots$.

87. Функция $y=\sqrt{x}$. Перечислим свойства функции $y=\sqrt{x}$.

1) Область определения — луч $[0; +\infty)$. Это следует из того, что выражение $\sqrt{x}$ определено лишь при $x\geqslant 0$.

2) Функция $y=\sqrt{x}$ ни четна, ни нечетна.

3) Функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на луче $[0; +\infty)$.

В самом деле, пусть $0\leqslant x_1<x_2$. Докажем, что тогда $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$. Предположим противное, т. е. что $\sqrt{x_1}\geqslant\sqrt{x_2}$. Тогда $(\sqrt{x_1})^2\geqslant(\sqrt{x_2})^2$ (см. свойство 9° числовых неравенств, п. 24), т. е. $x_1\geqslant x_2$, а это противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а верным является неравенство $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$.

Для построения графика составим таблицу значений функции:

x	0	1	2	4	9
y	0	1	1,4	2	3

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 27, *а*).

88. Функция $y=\sqrt[3]{x}$. Перечислим свойства функции $y=\sqrt[3]{x}$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Функция $y=\sqrt[3]{x}$ нечетна, так как $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$.

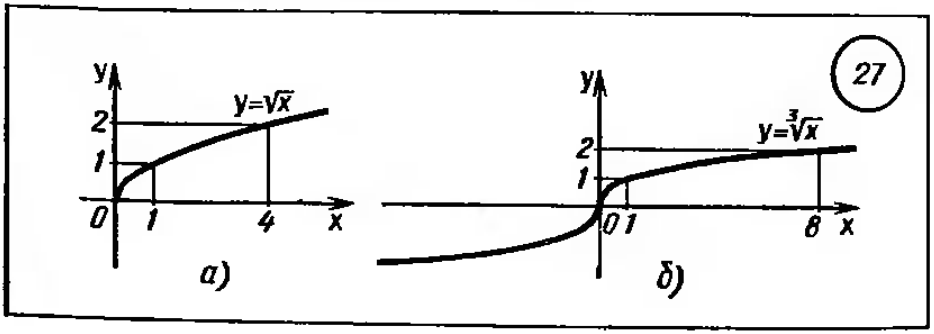
3) Функция $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает на всей числовой прямой.

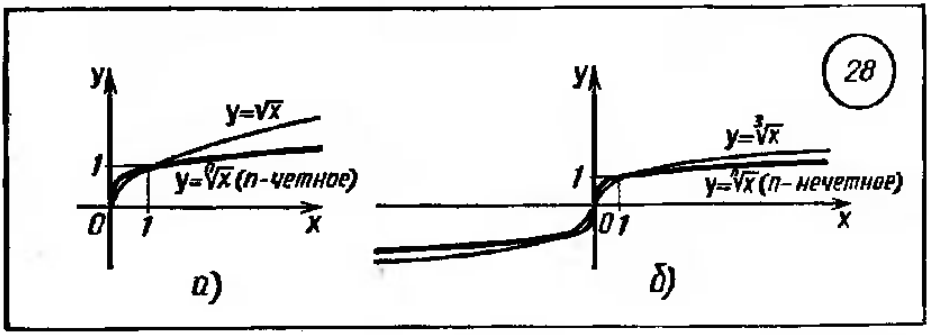
Для построения ветви графика при $x\geqslant 0$ составим таблицу значений функции $y=\sqrt[3]{x}$:

x	0	1	4	8
y	0	1	1,6	2

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой; затем к построенной ветви добавим ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 27, *б*).

89. Функция $y=\sqrt[n]{x}$. При четном n функция $y=\sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=\sqrt{x}$ (см. п. 87), и график ее напоминает график функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 28, *а*). При нечетном n функция $y=\sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=\sqrt[3]{x}$ (см. п. 88), и график ее напоминает график функции $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 28, *б*).





90. Степенная функция с положительным дробным показателем. Рассмотрим функцию $y=x^r$, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции.

1) Область определения — луч $[0; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) Функция $y=x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.

На рисунке 29, *а* изображен график функции $y=x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$, заданных на промежутке $[0; +\infty)$.

Подобный вид имеет график любой функции вида $y=x^r$, где $r>1$.

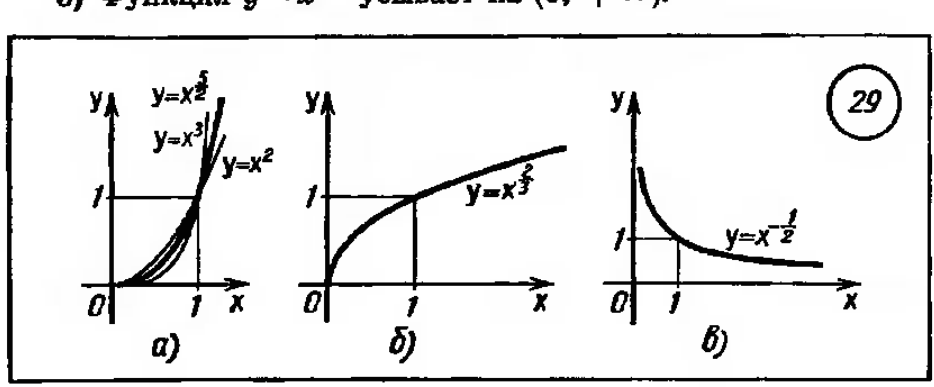
На рисунке 29, *б* изображен график функции $y=x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y=x^r$, где $0<r<1$.

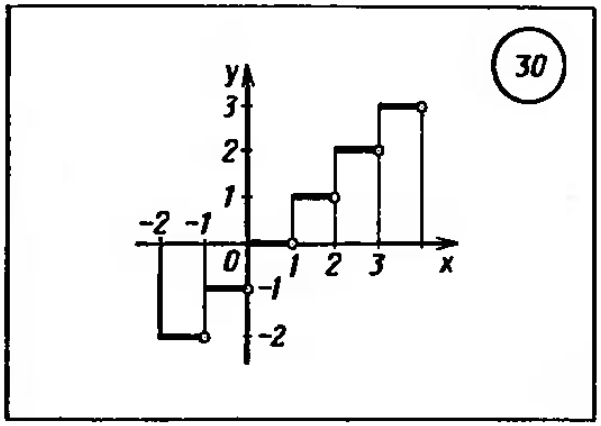
91. Степенная функция с отрицательным дробным показателем. Рассмотрим фуикцию $y=x^{-r}$, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции.

1) Область определения — промежуток $(0; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) Функция $y=x^{-r}$ убывает на $(0; +\infty)$.





Построим для примера график функции $y=x^{-\frac{1}{2}}$. Составим таблицу значений функции:

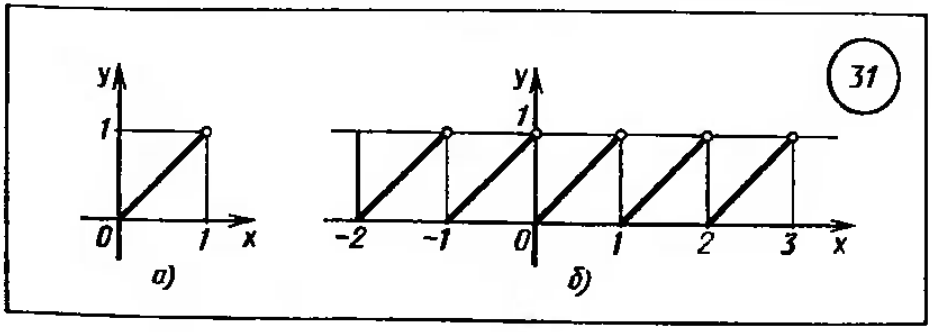
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

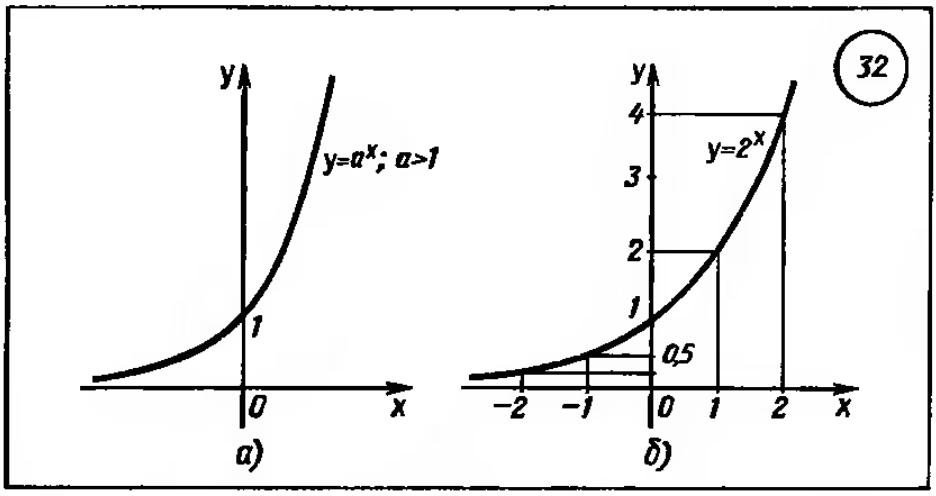
Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 29, *в*). Подобный вид имеет график любой функции $y=x^r$, где r — отрицательная дробь.

92. Функция $y=[x]$. Построим график функции $y=[x]$ (см. п. 31). Если $0\leqslant x<1$, то $y=[x]=0$; если $1\leqslant x<2$, то $y=[x]=1$; если $-1\leqslant x<0$, то $y=[x]=-1$ и т. д. График функции $y=[x]$ изображен на рисунке 30.

93. Функция $y=\{x\}$. Построим график функции $y=\{x\}$ (см. п. 31). Заметим, что $\{x+1\}=\{x\}$, поэтому достаточно сначала построить ветвь графика на любом промежутке длиной 1, например на $[0; 1)$. Если $0\leqslant x<1$, то $[x]=0$, а потому $\{x\}=x$.

На рисунке 31, *а* изображен график функции $y=\{x\}$ на





промежутке [0; 1), а на рисунке 31, *б* изображен график функции $y=\{x\}$ на всей числовой прямой.

94. Показательная функция. *Показательная функция* задается формулой $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$.

Перечислим свойства функции $y=a^x$ при $a>1$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Область значений функции — промежуток $(0; +\infty)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной. Это следует из того, что $a^{-x}\neq a^x$ и $a^{-x}\neq -a^x$.

4) Функция возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y=a^x$ при $a>1$ выглядит так, как показано на рисунке 32, *а*. Отметим, что эта функция принимает любые положительные значения.

Пример 1. Построить график функции $y=2^x$.

Решение. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8

С помощью найденных точек строим график функции $y=2^x$ (рис. 32, *б*).

Свойства функции $y=a^x$ при $0<a<1$.

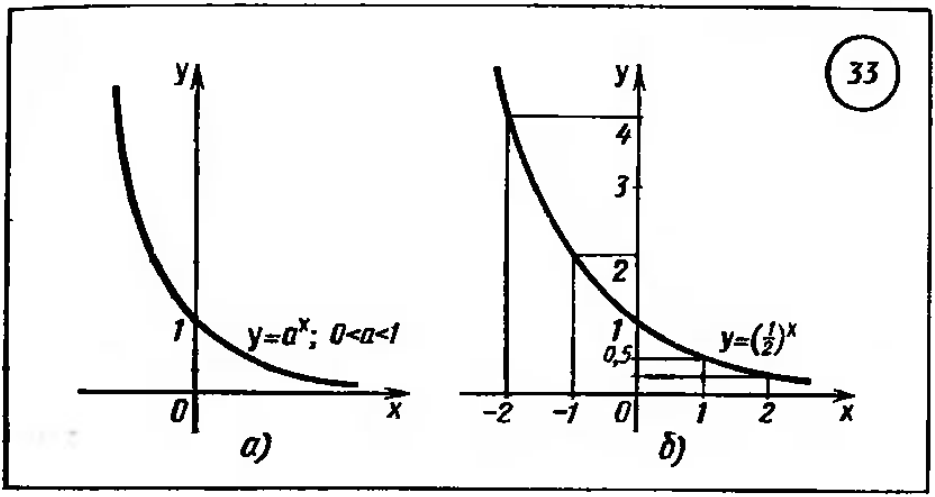
1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Область значений — $(0; +\infty)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывает на всей числовой прямой.

График функции $y=a^x$ при $0<a<1$ выглядит так, как показано на рисунке 33, *а*. Отметим, что эта функция принимает любые положительные значения.



Пример 2. Построить график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

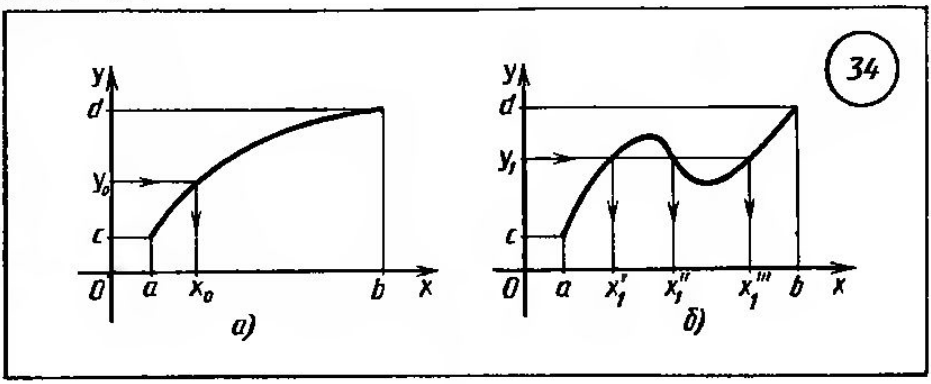
Решение. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

С помощью найденных точек строим график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 33, *б*).

95. Обратная функция. График обратной функции. Сравним две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, их графики изображены на рисунке 34. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют областью своих значений отрезок $[c; d]$. Первая функция обладает следующим свойством: для любого y_0 из отрезка $[c; d]$ есть только одно значение x_0 из отрезка $[a; b]$, такое, что $f(x_0)=y_0$. Геометрически указанное выше свойство означает следующее: любая горизонтальная прямая, пересекающая ось y между точками c и d, пересекает график функции $y=f(x)$ только в одной точке. Вторая функция этим свойством не обладает: например, для значения y_1 прямая $y=y_1$ пересекает график функции $y=g(x)$ в трех точках. Значит, в первом случае при каждом фиксированном y_0 из отрезка $[c; d]$ уравнение $f(x)=y_0$ имеет только один корень x_0, а во втором случае при некоторых y, например, при $y=y_1$ уравнение $g(x)=y_1$ имеет более одного корня.

Если функция $y=f(x)$ такова, что для любого ее значения



y_0 уравнение $f(x)=y_0$ имеет относительно x единственный корень, то говорят, что функция f *обратима*.

Так, функция $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 34, *а*, обратима, а фуикция $y=g(x)$, график которой изображеи на рисунке 34, *б*, необратима.

Если функция $y=f(x)$ обратима, то, выразив x из формулы $y=f(x)$ и поменяв затем x и y местами, получим *обратную* функцию.

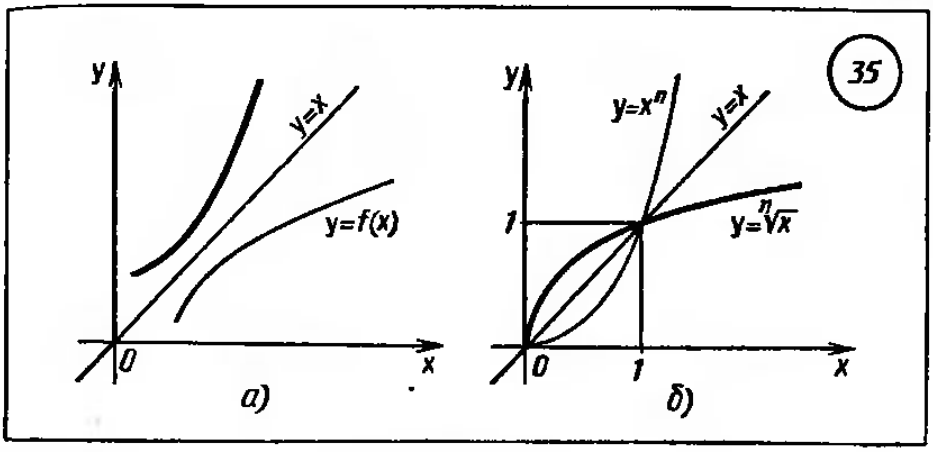
Обратимся еще раз к рисуику 34. Сравнивая графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, замечаем, что $y=f(x)$ — возрастающая функция (и у нее есть обратная фуикция), тогда как функция $y=g(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей (и у нее нет обратной функции). Возрастание илн убывание функции обеспечивает существование обратиой функции.

Т.3.3. Если функция $y=f(x)$ определена и возрастает (или убывает) на промежутке X и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (или убывает) на Y.

Пример. Доказать, что у функции $y=2x-1$ есть обратная, и найтн ее.

Решение. Функция $y=2x-1$ возрастает на всей числовой прямой, значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти обратную функцию, надо из формулы $y=2x-1$ выразить x. Получим $x=\frac{y+1}{2}$. Поменяв x и y местами, получим $y=\frac{x+1}{2}$. Это и есть искомая обратная функция.

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования плоскостн xy, пере-



водящего точку $(y; x)$ в точку $(x; y)$. Этим преобразованием является симметрия относительно прямой $y=x$.

Таким образом, *чтобы построить график функции, обратной к функции $y=f(x)$, надо график функции $y=f(x)$ подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y=x$* (рис. 35, *а*).

Например, если $y=x^n$, где $x\geqslant 0$, n — натуральное, $n>1$, то $x=\sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y=\sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных функций $y=x^n$ и $y=\sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 35, *б*).

96. Логарифмическая функция. Показательная функция $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 3.3).

1) Область определения — $(-\infty; +\infty)$.

2) Область значений — $(0; +\infty)$.

3) Функция $y=a^x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Эти свойства обеспечивают существование функции, обратной показательной, определенной на $(0; +\infty)$ и имеющей областью своих значений множество $(-\infty; +\infty)$.

Эта обратная функция обозначается так: $y=\log_a x$ (читается: *«Логарифм числа x по основанию a»*). Итак, *логарифмическая функция $y=\log_a x$*, где $a>0$ и $a\neq 1$,— это функция, обратная к показательной функции $y=a^x$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 3.3):

1) Область определения — $(0; +\infty)$.

2) Область значений — $(-\infty; +\infty)$.

3) Функция ни четная, ни нечетная.

4) Функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ при $a>1$, убывает на $(0; +\infty)$ при $0<a<1$.

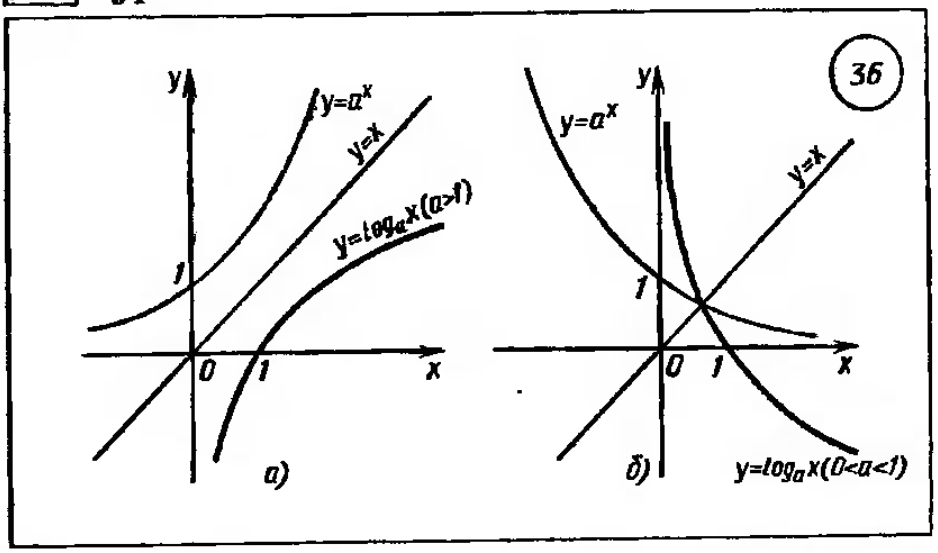
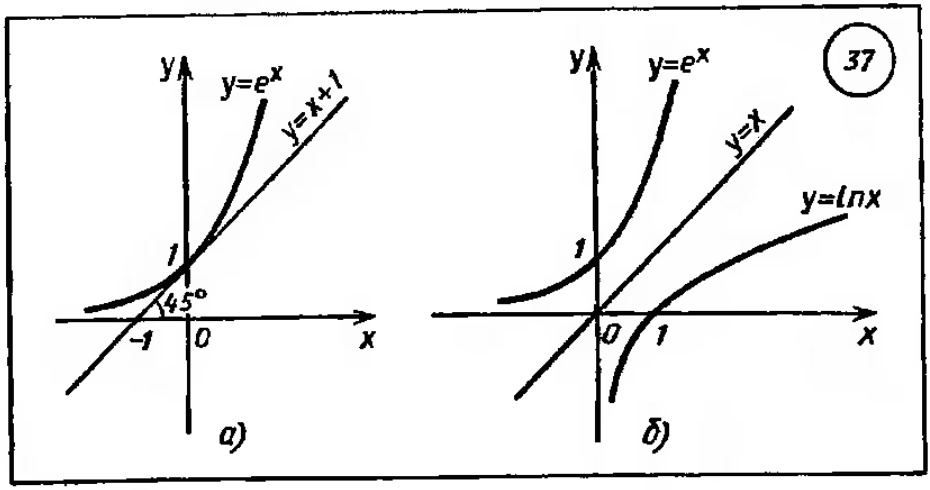
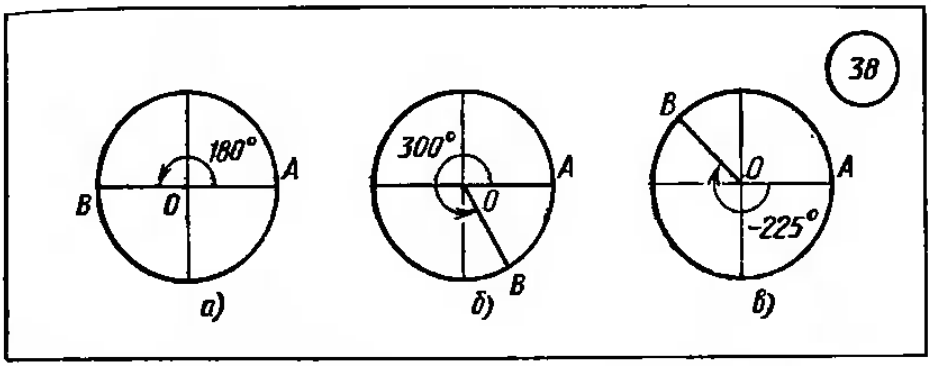


График функции $y=\log_a x$ может быть получен из графика функции $y=a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$. На рисунке 36, *а* построен график логарифмической функции для $a>1$, а на рисунке 36, *б* — для $0<a<1$.

97. Число *e*. Функция $y=e^x$. Функция $y=\ln x$. Среди показательных функций $y=a^x$, где $a>1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции (см. п. 215) в точке (0; 1) образует с осью x угол 45° (рис. 37, *а*). Основание a такой функции a^x принято обозначать буквой e, т. е. $y=e^x$. Подсчитано, что $e=2{,}7182818284590...$, и уста-

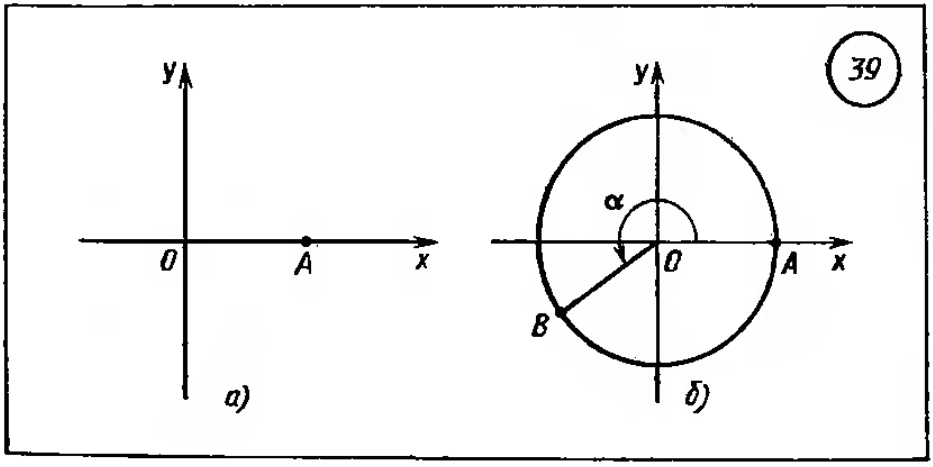




новлено, что e — иррациональное число. Логарифмическую функцию, обратную показательной функции $y=e^x$, т. е. функцию $y=\log_e x$, принято обозначать $y=\ln x$ (ln читается *«натуральный логарифм»*). Графики функций $y=e^x$ и $y=\ln x$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 37, *б*).

96. Определение тригонометрических функций. Для угла α, такого, что $0°<\alpha<180°$, понятия $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ определены в курсе геометрии (см. часть II). В алгебре рассматривают повороты отрезка OA около точки O на любой угол, при этом отрезок OA называют *начальным радиусом*. Поворот на положительный угол осуществляется в направлении против часовой стрелки, поворот на отрицательный угол — по часовой стрелке. На рисунке 38 показаны повороты на углы 180°, 300°, —225°; начальный радиус OA в результате поворота переходит в радиус OB. При повороте на 360° отрезок OA возвращается в первоначальное положение.

Пусть α — произвольный угол. Возьмем отрезок OA в координатной плоскости xy так, чтобы точка A принадлежала положительной полуоси x (рис. 39, *а*). Пусть при повороте



около точки 0 на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB (рис. 39, *б*). Тогда *синусом угла* α называют отношение ординаты точки B к радиусу и обозначают $\sin\alpha$; *косинусом угла* α называют отношение абсциссы точки B к радиусу и обозначают $\cos\alpha$; *тангенсом угла* α называют отношение ординаты точки B к ее абсциссе и обозначают $\operatorname{tg}\alpha$; *котангенсом угла* α называют отношение абсциссы точки B к ее ординате и обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$.

Приведем таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов:

Функция	Аргумент α						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Из определений следует, что не существует тангенс углов, косинус которых равен 0, и котангенс углов, синус которых равен 0.

Можно говорить о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе не только угла, но и числа, используя радианную меру угла:

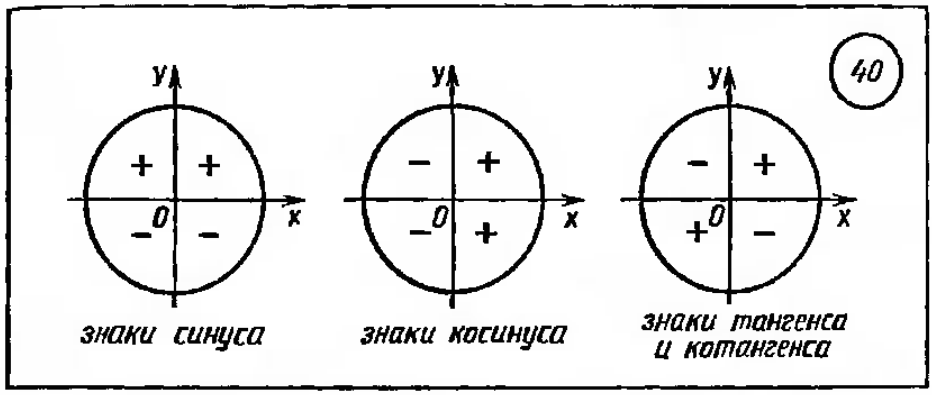
$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ,\quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017 \text{ рад}.$$

Например, $\sin 4 \approx \sin(4 \cdot 57^\circ) = \sin 228^\circ$,

$$\cos 225^\circ = \cos\left(225 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}.$$

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют *тригонометрическими функциями.*

99. Знаки тригонометрических функций по четвертям. Пусть при повороте около точки O на угол x начальный радиус OA переходит в радиус OB. Из определений тригонометрических функций (см. п. 98) следует, что знак $\sin x$ совпадает со



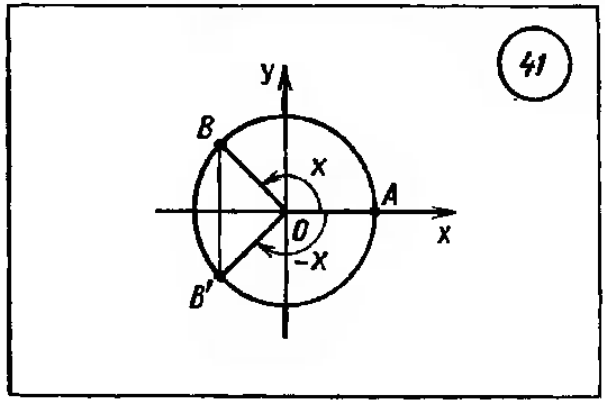
знаком ординаты точки B, а знак $\cos x$ совпадает со знаком абсциссы точки B. Знаки тригонометрических функций по четвертям указаны на рисунке 40.

100. Исследование тригонометрических функций на четность, нечетность. Если при повороте около точки O на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB, то при повороте на угол $-\alpha$ начальный радиус OA перейдет в радиус OB', симметричный OB относительно оси абсцисс (рис. 41). Абсциссы точек B и B' равны, а ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что

$$\cos(-x)=\cos x, \qquad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,$$
$$\sin(-x)=-\sin x, \qquad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x.$$

Таким образом, функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ нечетные, а функция $y=\cos x$ четная (см. п. 74).

101. Периодичность тригонометрических функций. Если при повороте около точки O на угол x начальный радиус OA переходит в радиус OB, то при повороте на угол $x+360°$ начальный радиус OA также перейдет в радиус OB. Значит,



$$\sin(x+360^\circ)=\sin x,$$
$$\cos(x+360^\circ)=\cos x.$$

Более общими являются равенства

$$\sin(x+360^\circ k)=\sin x,$$
$$\cos(x+360^\circ k)=\cos x,$$

где k — любое целое число.

Если аргумент x выражен в радианах, то

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,$$
$$\cos(x+2\pi k)=\cos x,$$

где k — любое целое число.

Для функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ справедливы равенства

$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x,$$

где k — любое целое число.

Таким образом, любое число вида $2\pi k$ является периодом функций $\sin x$, $\cos x$, а число вида πk — периодом функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. При этом 2π — *основной период* $\sin x$, $\cos x$, а π — *основной период* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (см. п. 76).

Используя свойства четности, нечетности, периодичиости, можно тригонометрическую функцию интересующего нас угла свести к тригонометрической функции угла, заключенного в пределах от 0° до 180°.

Пример. Вычислить $\sin 945^\circ$.

Решение. Имеем $\sin 945^\circ=\sin(720^\circ+225^\circ)=$ $=\sin(225^\circ+360^\circ\cdot 2)=\sin(225^\circ-360^\circ)=\sin(-135^\circ)=$ $=-\sin 135^\circ$. Далее, $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ$ (см. п. 126), но $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. п. 98), значит, $\sin 945^\circ=-\sin 135^\circ=$ $=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

102. Свойства и график функции $y=\sin x$.

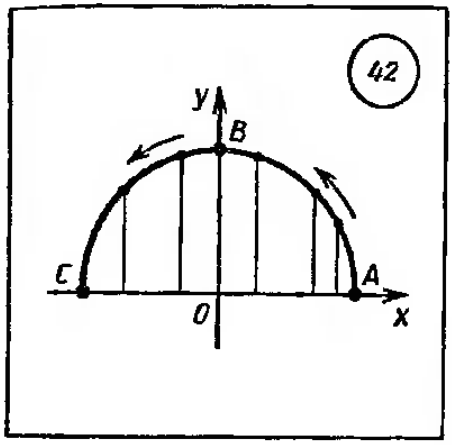
1) Область определения — множество всех действительных чисел.

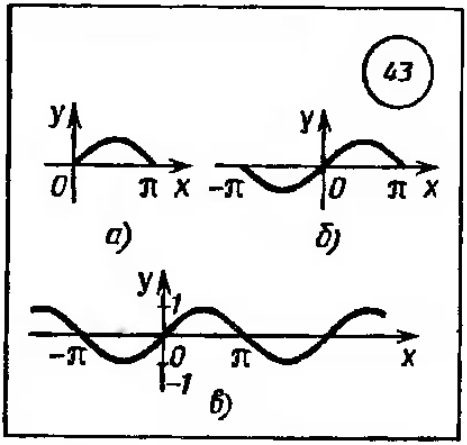
2) Область значений — отрезок $[-1;\ 1]$.

3) Функция периодическая; основной период равен 2π (см. п. 101).

4) Функция нечетная (см. п. 100).

5) Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ (рис. 42).





Взяв контрольные точки (0; 0), $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, (π; 0), построим график функции $y=\sin x$ на отрезке [0; π] (рис. 43,а). Так как функция $y=\sin x$ нечетная, то, выполнив симметрию построенного графика относительно начала координат, получим график функции на отрезке [−π; π] (рис. 43,*б*). Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y=\sin x$, можно построить график на всей области определения (рис. 43, *в*).

103. Свойства и график функции $y=\cos x$. Исследование функции $y=\cos x$ проводится аналогично исследованию функции $y=\sin x$ (см. п. 102). Перечислим свойства функции $y=\cos x$:

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

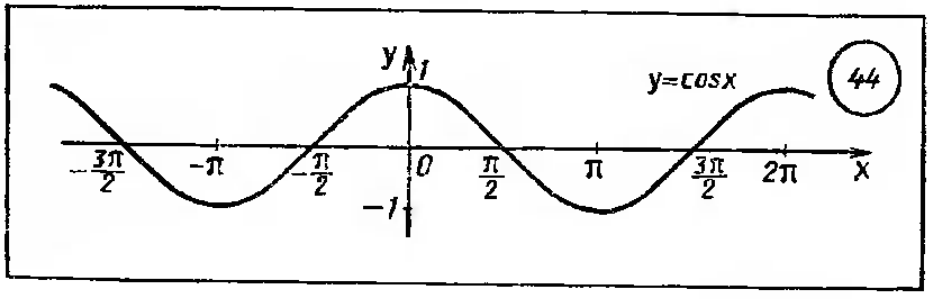
2) Область значений — отрезок [−1; 1].

3) Функция периодическая с основным периодом 2π.

4) Функция четная.

5) Функция убывает на промежутках $[2\pi n; \pi+2\pi n]$ и возрастает на промежутках $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$, $n\in Z$.

График функции $y=\cos x$ изображен на рисунке 44.



104. Свойства и график функции $y=\operatorname{tg} x$.

1) Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

2) Область значений — вся числовая прямая.

3) π — основной период функции.

4) Функция нечетная.

5) Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\pi n\right)$.

Выбрав несколько контрольных точек (0; 0), $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$, строим график функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 45,*а*). Воспользовавшись нечетностью функции $y=\operatorname{tg} x$, построим график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 45,*б*). Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y=\operatorname{tg} x$, построим график на всей области определения (рис. 45,*в*).

105. Свойства и график функции $y=\operatorname{ctg} x$.

1) Область определения функции: $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

2) Область значений функции — вся числовая прямая.

3) Функция периодическая с основным периодом π.

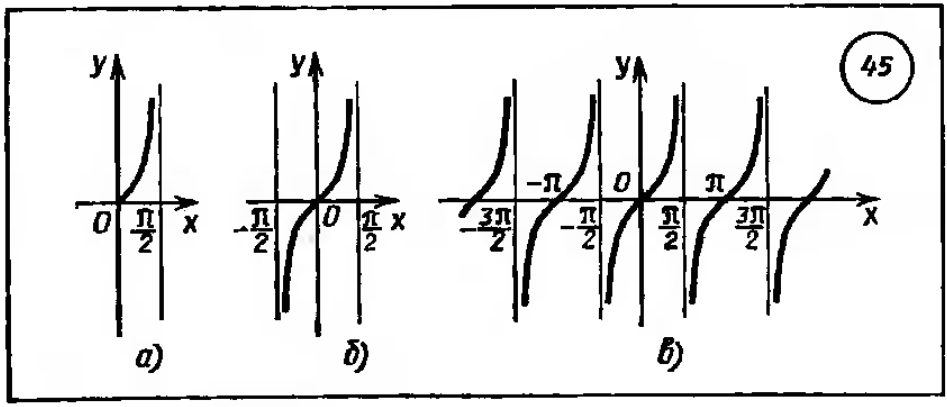
4) Функция нечетная.

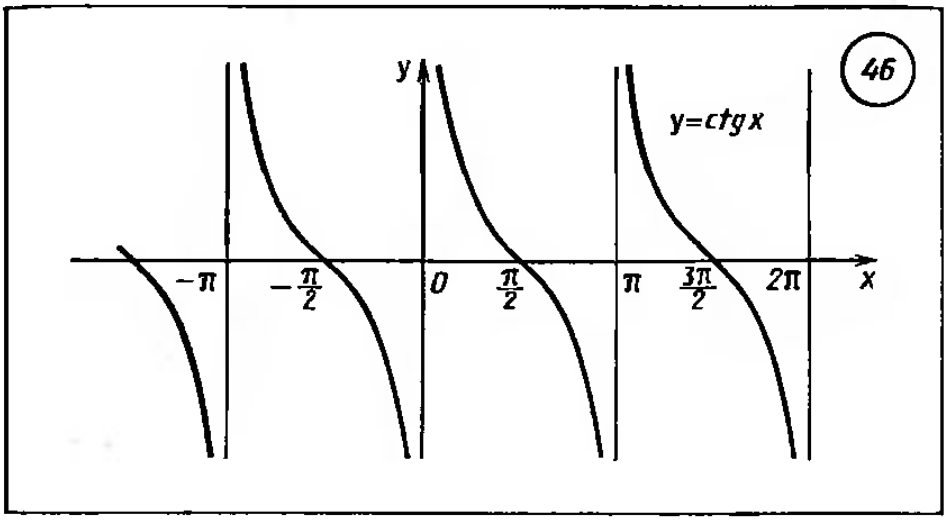
5) Функция $y=\operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $(\pi n; \pi+\pi n)$.

График функции $y=\operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 46.

106*. Функция $y=\arcsin x$. Функция $y=\sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, принимает на нем все свои значения от -1 до 1 (рис. 43). Значит, для функции $y=\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, существует обратная функция (см. п. 95). Эту функцию обозначают $y=\arcsin x$ (читается «арксинус x»).

График функции $y=\arcsin x$ может быть получен из графика функции $y=\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, с помощью пре-





образования симметрии последнего отиосительно прямой $y=x$ (рис. 47).

Перечислим иекоторые свойства функции $y=\arcsin x$:

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.

2) Область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Функция нечетная: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

4) Функция возрастающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y=\arcsin x$ и $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, эквивалентны. Подставив в равенство $x=\sin y$ вместо y его выражение, т. е. $\arcsin x$, получим $x=\sin(\arcsin x)$. Следовательно, для любого x из $[-1; 1]$ имеем:

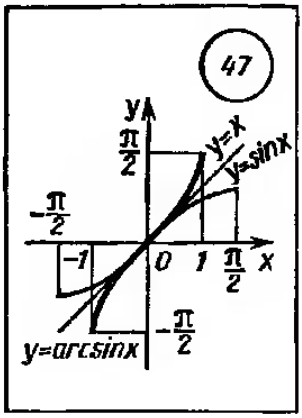
$$\sin(\arcsin x)=x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

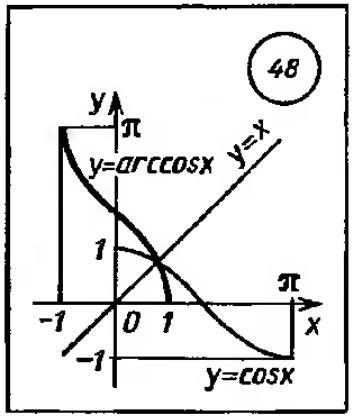
Последние два соотношения позволяют истолковать $\arcsin m$, где $-1\leqslant m\leqslant 1$, так: $\arcsin m$ — это число, взятое в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и такое, что его синус равен m.

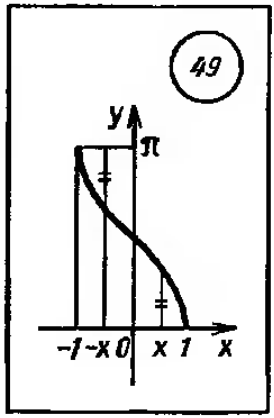
Пример. Вычислить: а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. а) По определению $y=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ — это такое число, что $\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y=\frac{\pi}{3}$. Таким образом,

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$







б) Рассуждая аналогично, получаем $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Но по свойству нечетности имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}$, следовательно, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

107*. Функция $y=\arccos x$. Функция $y=\cos x$ убывает на отрезке $[0;\ \pi]$, принимает на нем все значения от -1 до 1 (рис. 44). Значит, для функции $y=\cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0;\ \pi]$, существует обратная функция (см. п. 95). Она обозначается $\arccos x$ (читается «арккосинус x»).

График функции $y=\arccos x$ получается из графика функции $y=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$ (рис. 48).

Перечислим некоторые свойства функции $y=\arccos x$:

1) Область определения — отрезок $[-1;\ 1]$.

2) Область значений функции — отрезок $[0;\ \pi]$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y=\arccos x$ и $x=\cos y$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, эквивалентны. Подставив в равенство $x=\cos y$ вместо y выражение $\arccos x$, получим $\cos(\arccos x)=x$. Следовательно, для любого x из промежутка $[-1;\ 1]$ имеем:

$$\cos(\arccos x)=x,\ 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi.$$

Последние два соотношения позволяют истолковать $\arccos m$, где $-1\leqslant m\leqslant 1$, так: $\arccos m$ — это число, взятое в пределах от 0 до π и такое, что его косинус равен m.

Отметим, что имеет место следующее тождество:

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x. \qquad (1)$$

В его справедливости можно убедиться с помощью графика функции $y=\arccos x$ (рис. 49).

Пример. Вычислить: а) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. а) По определению $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — это такое число y, что $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Отсюда следует, что $y=\frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

б) По формуле (1) имеем $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

108*. Функция $y=\operatorname{arctg} x$. Функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает на нем все свои значения (рис. 45). Поэтому на указаиием интервале для функции $y=\operatorname{tg} x$ существует обратная фуикция (см. п. 95). Она обозначается $y=\operatorname{arctg} x$ (читается «арктангенс x»).

График функции $y=\operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y=\operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, с помощью преобразования симметрии отиосительио прямой $y=x$ (рис. 50).

Перечислим некоторые свойства функции $y=\operatorname{arctg} x$:

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область виачений функции — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.

4) Функция возрастающая.

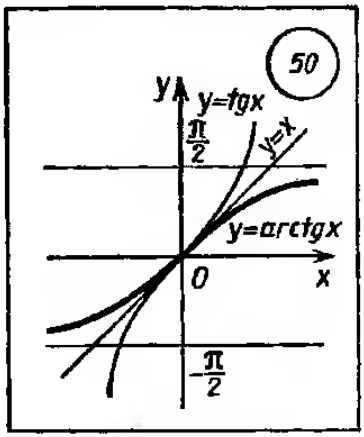
Из сказанного выше следует, что записи $y=\operatorname{arctg} x$ и $x=\operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, эквивалентны. Для любого x имеем:

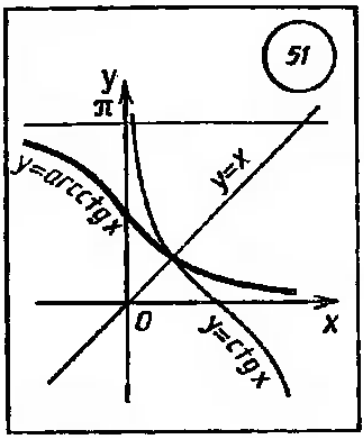
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}.$$

Последние соотношения позволяют истолковать $\operatorname{arctg} m$ так: $\operatorname{arctg} m$ — зто число, взятое в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (исключая сами значения $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$) и такое, что его тангенс равеи m.

Пример. Вычислить: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Решение. а) По определенню $y=\operatorname{arctg} 1$ — это такое число, что $\operatorname{tg} y=1$ и $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y=\frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$.





б) Рассуждая аналогично, получим $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Но $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

109*. Функция $y=\operatorname{arcctg} x$. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ убывает на интервале $(0;\ \pi)$, принимает на нем все свои значения (рис. 46). Следовательно, на этом интервале для функции $y=\operatorname{ctg} x$ существует обратная функция (см. п. 95). Она обозначается $y=\operatorname{arcctg} x$ (читается «арккотангенс x»).

График функции $y=\operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y=\operatorname{ctg} x$, $0<x<\pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$ (рис. 51).

Перечислим некоторые свойства функции $y=\operatorname{arcctg} x$:

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область значений функции — интервал $(0;\ \pi)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y=\operatorname{arcctg} x$ и $x=\operatorname{ctg} y$, $0<y<\pi$, эквивалентны. Для любого x имеем:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x,\ 0<\operatorname{arcctg} x<\pi.$$

Последние соотношения позволяют истолковать $\operatorname{arcctg} m$ так: $\operatorname{arcctg} m$ — это число, взятое в пределах от 0 до π (исключая сами значения 0 и π) и такое, что его котангенс равен m.

Имеет место тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x. \qquad (1)$$

Пример. Вычислить $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

Решение. Сначала вычислим $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$. Это такое число, что $\operatorname{ctg} y=\sqrt{3}$ и $0<y<\pi$. Значит, $y=\frac{\pi}{6}$.

По формуле (1) имеем $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

§ 11. Преобразования графиков

110. Построение графика функции $y=mf(x)$. Решим несколько задач.

Задача 1. Построить график функции $y=mf(x)$, где $m>0$, $m\neq 1$, если задан график функции $y=f(x)$.

Решение. Ординаты точек графика функции $y=mf(x)$ получаются умножением на m соответствующих ординат точек графика функции $y=f(x)$. Такое преобразование графика функции $y=f(x)$ называется его *растяжением от оси x с коэффициентом m*, если $m>1$, *и сжатием к оси x*, если $0<m<1$.

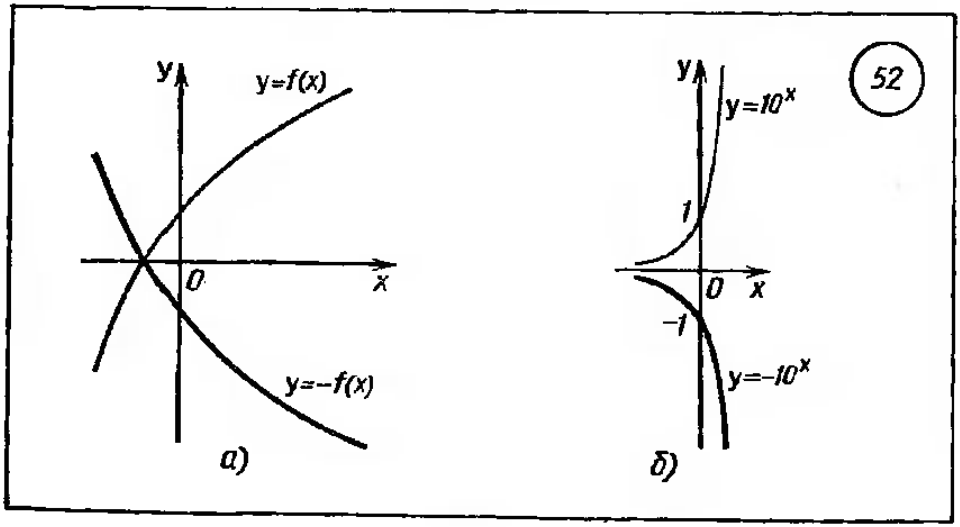
Задача 2. Построить график функции $y=-f(x)$, если задан график функции $y=f(x)$.

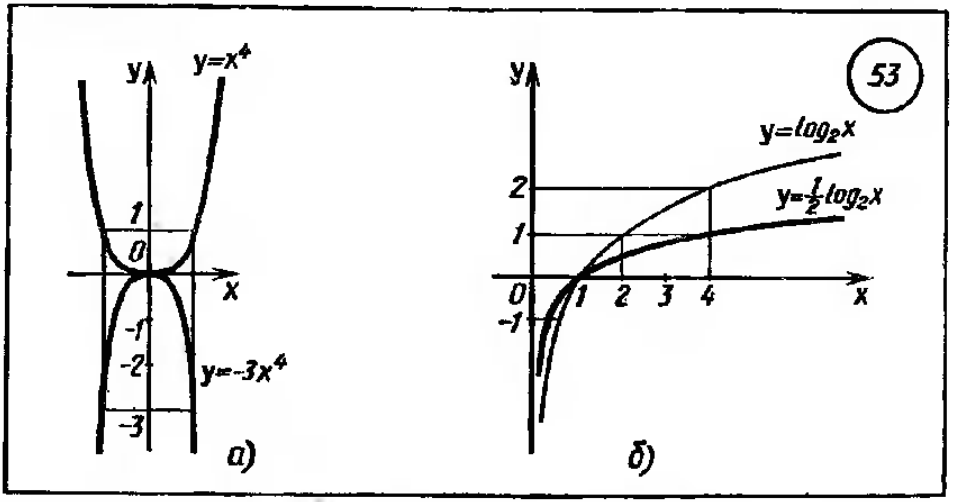
Решение. При одном и том же значении x ординаты точек графика функции $y=f(x)$ и функции $y=-f(x)$ отличаются только знаком. Значит, график функции $y=-f(x)$ можно получить из графика $y=f(x)$ преобразованием симметрии последнего относительно оси x (рис. 52, *а*).

На рисунке 52, *б* изображены графики функций $y=10^x$ и $y=-10^x$.

Задача 3. Построить график функции $y=mf(x)$, где $m<0$, $m\neq -1$, если задан график функции $y=f(x)$.

Решение. Так как $mf(x)=-|m|f(x)$, то график функции $y=mf(x)$ может быть получен при помощи растя-

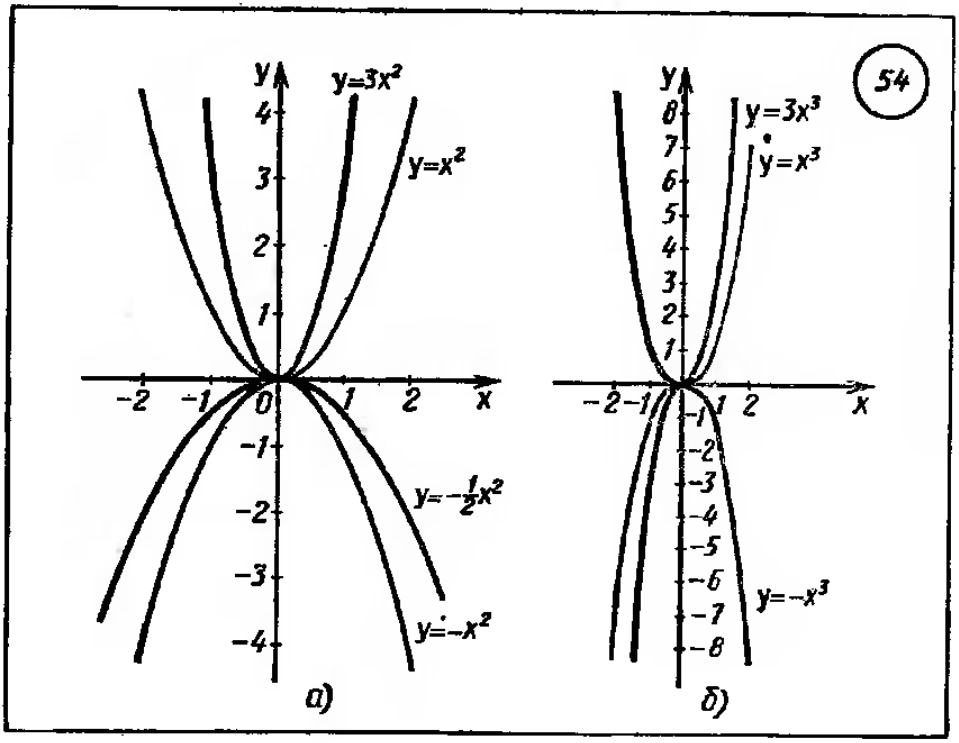


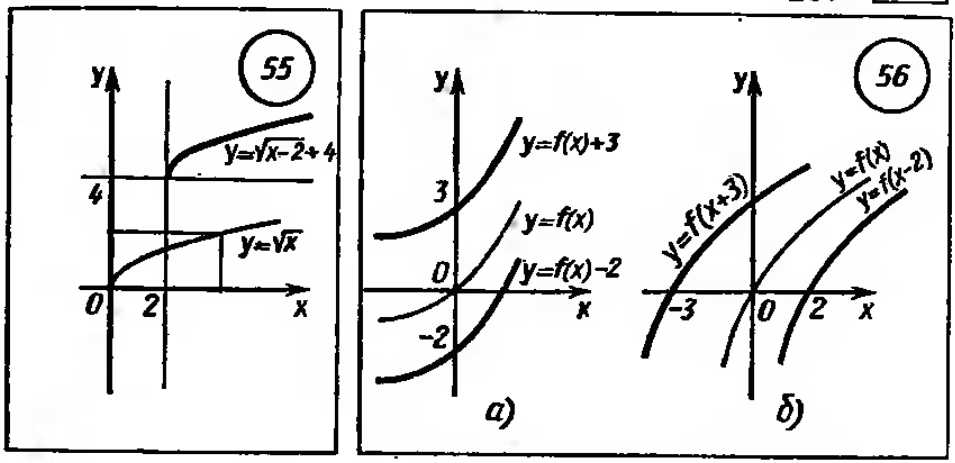


жения (сжатия) графика функции $y=f(x)$ от оси x с коэффициентом $|m|$ и последующим преобразованием симметрии относительно оси x (см. задачи 1 и 2).

На рисунке 53, *а* изображены графики функций $y=x^4$ и $y=-3x^4$.

На рисунке 53, *б* изображены графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\frac{1}{2}\log_2 x$.





111. Графики функций $y=ax^2$, $y=ax^3$. Графиком функции $y=x^2$ является парабола. Чтобы построить график функции $y=ax^3$, нужно осуществить растяжение (сжатие) параболы $y=x^3$ от оси x с коэффициентом $|a|$; при этом если $a<0$, то график функции $y=|a|x^2$ нужно еще подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x (см. п. 110).

На рисуике 54, *а* изображены графики функции $y=ax^2$ для a, равного 1; -1; 3; $-\frac{1}{2}$. Все эти графики называют *параболами*. При $a>0$ ветви параболы, служащей графиком функции $y=ax^2$, направлены вверх, а при $a<0$ — вниз.

Аналогично, зная график функций $y=x^3$, можно построить график функции вида $y=ax^3$. На рисунке 54, *б* изображены эти графики для случаев a, равного 1; -1; 3.

112. Построение графика функции $y=f(x-m)+n$. Пусть известен график функции $y=f(x)$, а построить нужно график функции $y=f(x-m)+n$.

Положим $x'=x-m$, $y'=y-n$. Тогда формулу $y=f(x-m)+n$, или, что то же самое, $y-n=f(x-m)$, можно переписать в виде $y'=f(x')$. Таким образом, график функции $y=f(x-m)+n$, построенный в координатной плоскости xy, совпадает с графиком функции $y'=f(x')$, построенным в координатной плоскости $x'y'$.

Формулы $x'=x-m$, $y'=y-n$, или, что то же самое, $x=x'+m$, $y=y'+n$, задают параллельный перенос, при котором любая точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+m; y+n)$ и, в частности, начало координат переходит в точку $(m; n)$.

Чтобы построить график функции $y=f(x-m)+n$, нужно:

1) выполнить параллельный перенос плоскости, выбрав началом новой системы координат $x'y'$ точку $O'(m; n)$;

2) в плоскости $x'y'$ построить график функции $y'=f(x')$.

Пример. Построить график функции $y=\sqrt{x-2}+4$.

Решение. 1) Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'(2;\ 4)$.

2) В плоскости $x'y'$ построим график функции $y'=\sqrt{x'}$. Это и есть требуемый график (рис. 55).

На рисунке 56, *а* изображены графики функций $y=f(x)$, $y=f(x)-2$, $y=f(x)+3$, а на рисунке 56, *б* — графики функций $y=f(x)$, $y=f(x-2)$, $y=f(x+3)$.

113. График квадратичной функции. *Квадратичной* называют функцию, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — любые действительные числа, причем $a\neq 0$. Для построения графика этой функции выполним следующие преобразования (называемые «выделением полного квадрата») квадратного трехчлена ax^2+bx+c:

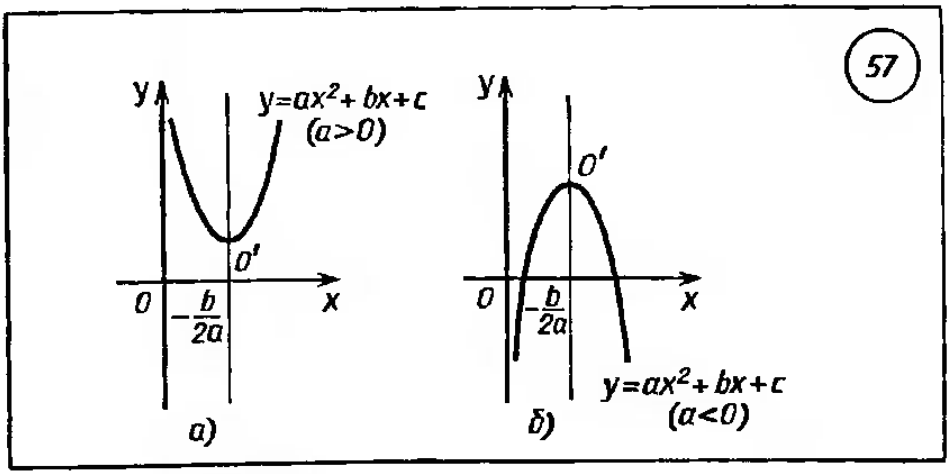
$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Итак, $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Для построения графика функции $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ нужно (см. п. 112) выполнить параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, и в плоскости $x'y'$ построить параболу —



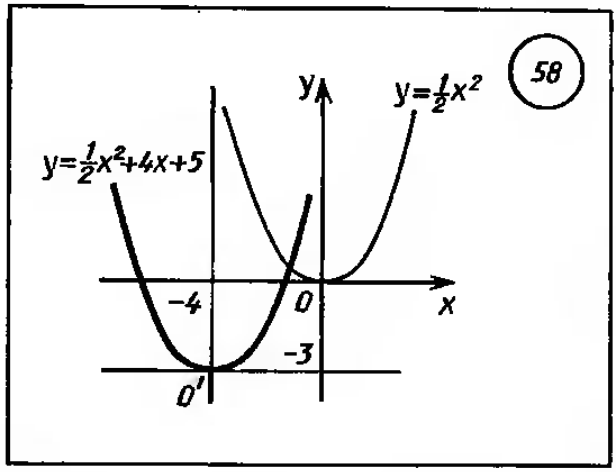


график функции $y'=a(x')^2$. Прямая $x=-\frac{b}{2a}$ называется *осью симметрии параболы*, служащей графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, а точка $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ — точка пересечения параболы с ее осью симметрии — называется *вершиной параболы*.

Если $a>0$, то ветви параболы, служащей графиком функции $y=ax^2+bx+c$, направлены вверх (рис. 57, *а*); в этом случае функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 57, *б*); в этом случае функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Пример. Построить график функции $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5$.

Решение. Имеем $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5=\frac{1}{2}(x^2+8x)+5=$ $=\frac{1}{2}((x^2+8x+16)-16)+5=\frac{1}{2}(x+4)^2-3$. Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'(-4; -3)$, и построим в координатной плоскости $x'y'$ параболу — график функции $y'=\frac{1}{2}(x')^2$. Это и есть график функции $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5$ (рис. 58).

114. Способы построения графика квадратичной функции. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, является парабо-

ла (см. п. 113). Для ее построения на практике используются три способа.

Первый способ — *отыскание координат вершины параболы по формулам.*

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Пример 1. Построить график функции $y = 2x^2 - 4x + 1$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$. Значит, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a} = -1$. Итак, $(1; -1)$ — вершина параболы. Для построения графика надо знать координаты еще нескольких точек:

x	0	2	3
y	1	1	7

Отметив вершину параболы, полученные точки и точки, симметричные им относительно оси параболы, строим требуемый график (рис. 59, *а*). Заметим, что запоминать формулы координат вершины параболы не следует. Достаточно воспользоваться тем, что если x_0 — абсцисса вершины параболы, то в этой точке $y'(x_0) = 0$ (см. п. 217). Из уравнения $(ax^2 + bx + c)' = 0$, т. е. $2ax + b = 0$, находим $x = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы.

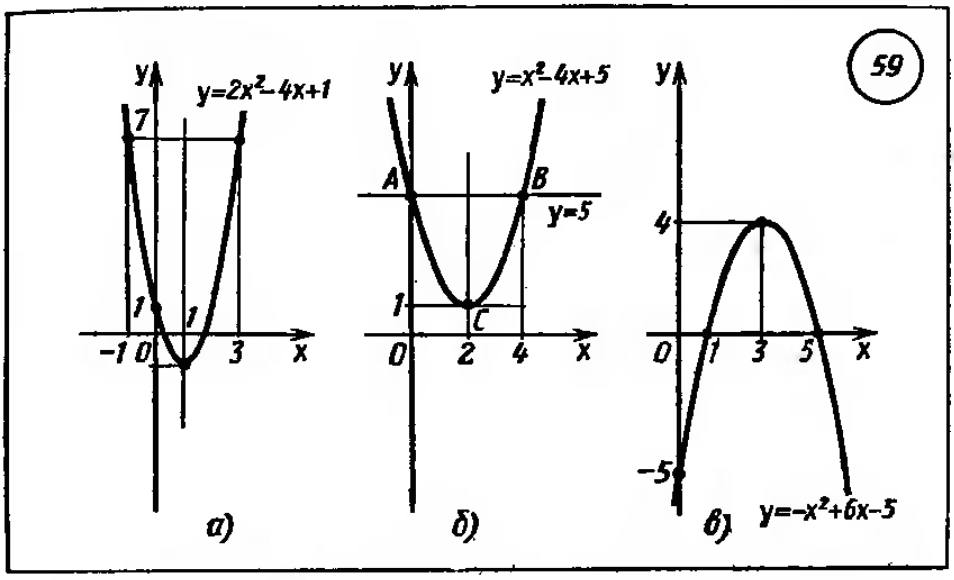
Второй способ — *построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

Пример 2. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

Решение. Найдем точки графика, имеющие ординату, равную свободному члену квадратного трехчлена, т. е. равную пяти. Для этого решим уравнение $x^2 - 4x + 5 = 5$. Имеем:

$$x^2 - 4x = 0,\ x(x-4) = 0,\ \text{откуда } x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Итак, мы нашли две точки графика $A(0; 5)$ и $B(4; 5)$. Отметим их на координатной плоскости (рис. 59, *б*). Мы знаем, что графиком является парабола. Точки A и B лежат на этой параболе и имеют одинаковую ординату. Значит, точки A и B симметричны относительно оси симметрии параболы, а потому ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Так как абсцисса точки A равна нулю, а абсцисса точки B равна четырем, то уравнение оси параболы: $x = 2$. Подставив значение $x = 2$ в формулу $y = x^2 - 4x + 5$, получим $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Значит, вершина C параболы, т. е. единственная точка параболы, лежащая на ее оси симметрии, имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Отметив на координатной плоскости точку $C(2; 1)$, построим параболу, проходящую через три точки



A, B, C. Это и будет график функции $y=x^2-4x+5$ (рис. 59, *б*). (Для более точного построения можно найти координаты еще нескольких точек и построить их.)

Третий способ — *построение параболы по корням квадратного трехчлена.*

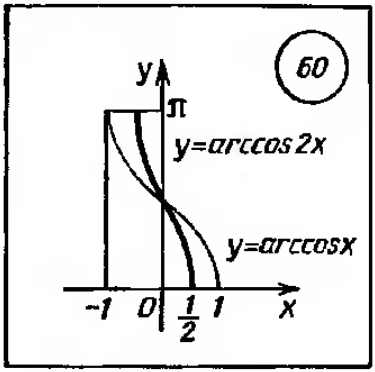
Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c (о решении уравнения $ax^2+bx+c=0$ см. п. 137). Тогда парабола, служащая графиком функции $y=ax^2+bx+c$, пересекает ось абсцисс в точках $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$, а ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Зная абсциссу x_0 вершины C параболы (точка C лежит на оси симметрии параболы, поэтому $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$), найдем по формуле $y=ax^2+bx+c$ ее ординату, а затем построим параболу по трем точкам A, B, C.

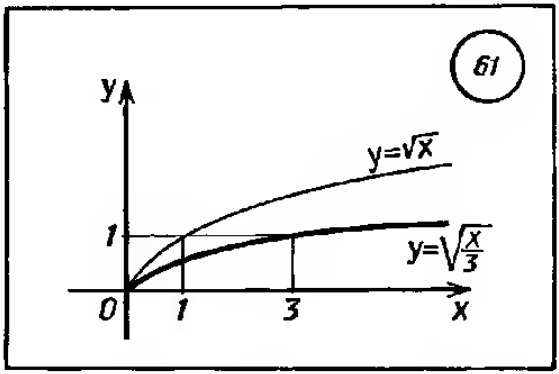
Пример 3. Построить график функции $y=-x^2+6x-5$.

Решение. Из уравнения $-x^2+6x-5=0$ находим $x_1=1$, $x_2=5$. Значит, мы знаем две точки искомой параболы: $A(1; 0)$ и $B(5; 0)$. Уравнение оси симметрии параболы таково: $x=3$. Подставив значение 3 вместо x в формулу $y=-x^2+6x-5$, находим $y=4$. Значит, вершиной параболы служит точка $C(3; 4)$. По трем точкам A, B и C строим параболу — график функции $y=-x^2+6x-5$ (рис. 59, *в*).

115. Построение графика функции $y=f(kx)$. Решим несколько задач.

Задача 1. Построить график функции $y=f(kx)$, где $k>0$, $k\neq 1$, если задан график функции $y=f(x)$.





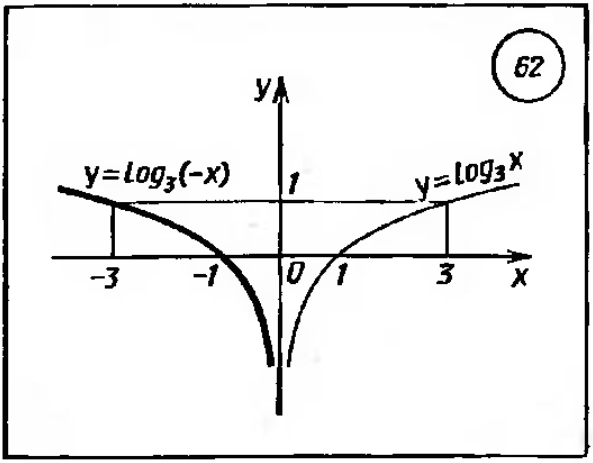
Р е ш е н и е. Ордината графика функции $y=f(kx)$ в точке x равна ординате графика функции $y=f(x)$ в точке kx. Это значит, что график функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ *сжатием с коэффициентом k к оси y* (если $0<k<1$, то фактически получается растяжение от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$).

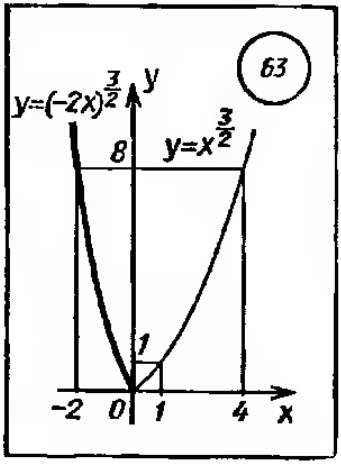
На рисунке 60 изображены графики функций $y=\arccos x$ и $y=\arccos 2x$, на рисунке 61 — графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$.

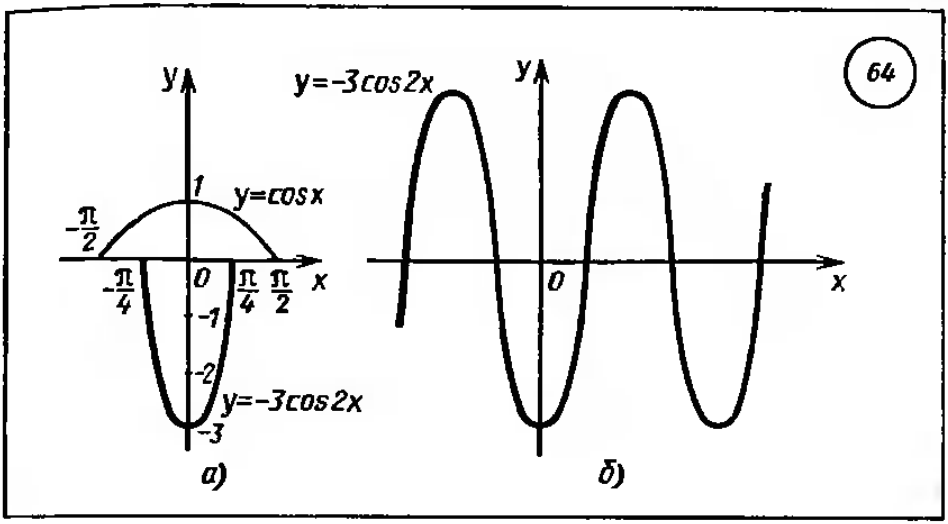
З а д а ч а 2. Зная график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(-x)$.

Р е ш е н и е. Ордината графика функции $y=f(-x)$ в точке x равна ординате графика функции $y=f(x)$ в точке $-x$. Это значит, что график функции $y=f(-x)$ может быть получен из графика фуикции $y=f(x)$ преобразоваиием симметрии последнего относительно оси y.

На рисунке 62 изображены графики функций $y=\log_3 x$ и $y=\log_3(-x)$.







Задача 3. Зная график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(kx)$, где $k<0$.

Решение. Имеем $f(kx)=f(-|k|\,x)$. Поэтому график функции $y=f(kx)$ может быть получен сжатием графика функции $y=f(x)$ с коэффициентом $|k|$ к оси y и симметрией полученного графика $y=f(|k|\,x)$ отиосительно оси y.

На рисунке 63 изображены графики функций $y=x^{\frac{3}{2}}$ и $y=(-2x)^{\frac{3}{2}}$.

116. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций. Здесь речь идет о построении графиков функций вида $y=m\sin kx$, $y=m\cos kx$, $y=m\,\mathrm{tg}\,kx$, $y=m\,\mathrm{ctg}\,kx$.

Вообще говоря, построение графика функции $y=m\sin kx$ осуществляется в три этапа: 1) строят график функции $y=\sin x$ (см. п. 102); 2) строят график функции $y=\sin kx$ (см. п. 115); 3) строят график функции $y=m\sin kx$ (см. п. 110). Аналогично обстоит дело с другими тригонометрическими функциями.

На практике обычно при построенин графика функции $y=m\sin kx$ $(y=m\cos kx)$ выполняют растяжение и сжатие для одной полуволны графика функции $y=\sin x$ $(y=\cos x)$, а затем строят весь график. При построении графика функции $y=m\,\mathrm{tg}\,kx$ $(y=m\,\mathrm{ctg}\,kx)$ выполняют растяжение и сжатие для одной ветви графика функции $y=\mathrm{tg}\,x$ $(y=\mathrm{ctg}\,x)$, а затем строят весь график.

Пример. Построить график функции $y=-3\cos 2x$.

Решение. Построим одну полуволну графика функции $y=\cos x$. Осуществив ее сжатие к оси y с коэффициентом 2, получим график функции $y=\cos 2x$. Теперь осуществим растя-

жение полученного графика от оси x с коэффициентом 3, а затем преобразование симметрии относительно оси x. В результате мы получим график функции $y=-3\cos 2x$. На рисунке 64, *а* показана одна полуволна графика, а на рисунке 64, *б* — весь график.

117. График гармонического колебания $y=A\sin(\omega x+\alpha)$. Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой

$$y=A\sin(\omega x+\alpha). \qquad (1)$$

Эта формула называется формулой *гармонических* или *синусоидальных колебаний*. Величина A называется *амплитудой колебания*, она характеризует размах колебания. Величина ω называется *частотой колебания*. Чем больше ω, тем больше число колебаний за единицу времени (число колебаний за единицу времени равно $\frac{\omega}{2\pi}$). Наконец, α называется *начальной фазой колебания*.

Если, например, груз, висящий на пружине, вывести из положения равновесия, то он начнет совершать вертикальные колебания. Закон движения выражается формулой (1), где y — отклонение груза от положения равновесия, а x — время. Тот же закон встречается в теории переменного электрического тока. При вращении прямоугольной рамки, сделанной из проводящего электрический ток материала, в магнитном поле по ней идет переменный ток. Если рамка вращается равномерно, величина тока меняется по закону гармонических колебаний (1).

Построим график функции $y=A\sin(\omega x+\alpha)$. Прежде всего преобразуем функцию к виду $y=A\sin\left(\omega\left(x+\frac{\alpha}{\omega}\right)\right)$. Построение графика этой функции выполним в несколько этапов.

1) Осуществим параллельный перенос системы координат, поместив начало новой системы $x'y'$ в точку $O'\left(-\frac{\alpha}{\omega};0\right)$.

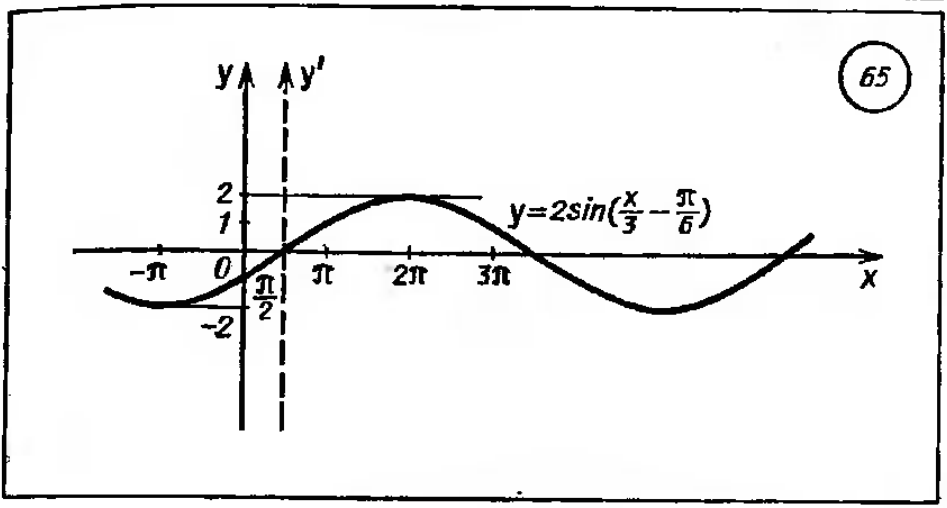
2) В системе $x'y'$ построим график функции $y'=\sin x'$ (при этом можно ограничиться одной полуволной).

3) Осуществив сжатие построенного графика к оси y' с коэффициентом ω, получим график $y'=\sin\omega x'$.

4) Осуществив растяжение последнего графика от оси x' с коэффициентом A, получим требуемый график.

Пример 1. Построить график функции $y=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Имеем $y=2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Построение графика выполним в несколько этапов.



1) Осуществим параллельный перенос системы координат, выбрав началом новой системы точку $O'\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

В системе $x'y'$ нам нужно построить график функции $y' = 2 \sin \frac{1}{3} x'$.

2) Строим график функции $y' = \sin x'$.

3) Выполним сжатие графика к оси y' с коэффициентом $\frac{1}{3}$ (т. е. растяжение с коэффициентом 3), получим график функции $y' = \sin \frac{x'}{3}$.

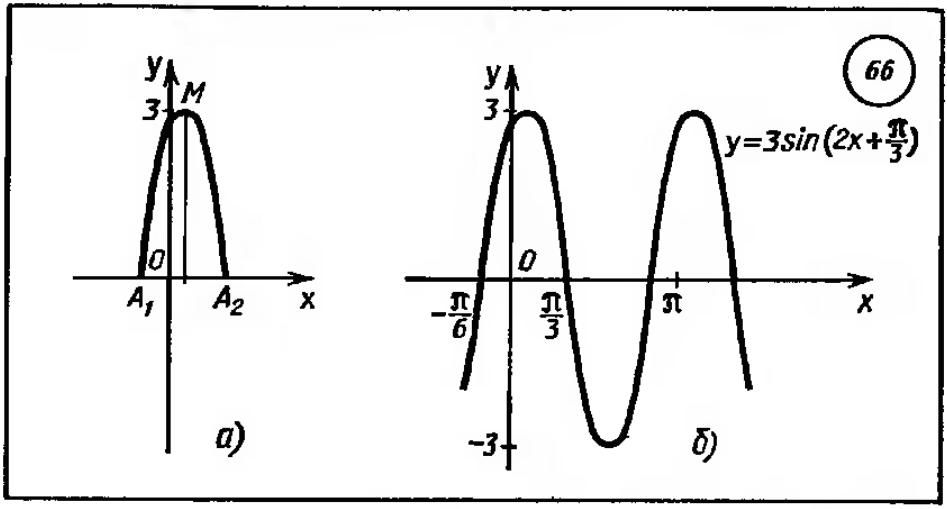
4) Осуществим растяжение последнего графика от оси x' с коэффициентом 2. Полученный график является графиком функции $y = 2 \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 65).

На практике вместо сжатия, растяжения и параллельного переноса часто поступают иначе: отыскивают значения x, при которых заданная функция обращается в нуль, и значения, при которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Далее строят график по точкам.

Пример 2. Построить график гармонического колебания

$$y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Решим сначала уравнение $3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Имеем (см. п. 154) $2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Дадим



параметру k два значения: 0 и 1. При $k=0$ имеем $x=-\frac{\pi}{6}$, при $k=1$ имеем $x=\frac{\pi}{3}$. Значит, точки $A_1\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ и $A_2\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ служат концами одной полуволны искомой синусоиды. Далее, серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$, в которой функция $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ принимает максимальное значение, равное трем. Значит, $M\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ — точка максимума (см. п. 217). Отмечаем на координатной плоскости точки $A_1\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$, $A_2\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ и $M\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ и строим полуволну искомого графика (рис. 66, *а*). После этого строим график заданного гармонического колебания (рис. 66, *б*).

ГЛАВА IV. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 12. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

118. Понятие трансцендентного выражения. *Трансцендентным* называется выражение, содержащее переменные под знаком трансцендентной функции, т. е. под знаком показательной, логарифмической, тригонометрических или обратных тригонометрических функций. Примеры трансцендентных выражений: $\log_2 a+\log_2 b$; $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$; $\arcsin(x^2-x)$.

119. Определение логарифма положительного числа по данному основанию. *Логарифмом* положительного числа x по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x:

$$a^{\log_a x}=x.$$

Равенство $\log_a x=y$ означает, что $a^y=x$.

Например, $\log_3 81=4$, так как $3^4=81$; $\log_{10} 0{,}001=-3$, так как $10^{-3}=0{,}001$; $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$$\log_a 1=0,$$
$$\log_a a=1.$$

Первое следует из того, что $a^0=1$, а второе — из того, что $a^1=a$.

Вообще имеет место равенство $\log_a a^r=r$.

В записи $\log_a x$ число a — *основание логарифма*, x — *логарифмируемое число*.

120. Свойства логарифмов.

1^0. Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то

$$\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$$

(логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей).

Например, $\log_3 15=\log_3(3\cdot 5)=\log_3 3+\log_3 5=1+\log_3 5$.

2^0. Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$$

(логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя).

Например, $\log_2 1{,}25=\log_2\frac{5}{4}=\log_2 5-\log_2 4=\log_2 5-2$.

Если $x_1<0$ и $x_2<0$, то написать

$$\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$$

нельзя, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (логарифм отрицательного числа не существует). Здесь можно рассуждать так: x_1 и x_2 — отрицательные числа, следовательно, $x_1x_2>0$. Но тогда $x_1x_2=|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|$. Значит, $\log_a x_1x_2=\log_a|x_1|\cdot|x_2|$.

Так как $|x_1|>0$ и $|x_2|>0$, то, применив свойство 1^0, получим $\log_a|x_1|\cdot|x_2|=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|$.

Итак, если $x_1x_2>0$, то

$$\log_a x_1x_2=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|$$

и аналогично $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|$

(нетрудно заметить, что оба последних равенства справедливы и в случае, когда $x_1>0$, $x_2>0$).

3^0. Если $x>0$, то

$$\log_a x^r=r\log_a x$$

(логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени).

Пример 1. $\log_5 81=\log_5 3^4=4\log_5 3$.

Пример 2. $\log_3\sqrt{2}=\log_3 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 2$.

Пример 3. Вычислить $\log_2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, если $\log_2 3=a$.

Решение. Имеем:

$$\log_2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\log_2\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(\log_2 3-\log_2 4)=\frac{1}{3}(a-2).$$

Справедливо следующее утверждение: *если k — четное число, то $\log_a x^k=k\log_a|x|$ для любого $x\neq 0$.*

Например:

$$\log_2 x^4=4\log_2|x|;\ \log_3 x^2=2\log_3|x|.$$

121. Переход к новому основанию логарифма. Справедливы следующие два свойства, позволяющие перейти к новому основанию логарифма:

1^0. Если $x>0$, то

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(формула перехода к новому основанию).

Например:

$$\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2};\quad \log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}.$$

2^0. Если $x>0$, то

$$\log_a x=\log_{a^k} x^k.$$

Например, $\log_2 5=\log_{2^3} 5^3=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}$.

Пример 1. Вычислить $\log_5 6$, если $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.

Решение. Перейдем в $\log_5 6$ к основанию 2. Воспользовавшись свойством 1^0, получим:

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3)}{\log_2 \frac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1+a}{b-1}.$$

Пример 2. Вычислить $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[6]{32}$.

Решение. Согласно свойству 2^0 можно основание логарифма и логарифмируемое число возвести в одну и ту же степень, при этом числовое значение выражения не изменится. Имеем:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 \sqrt{32} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

122. Логарифмирование и потенцирование. Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы входящих в выражение A чисел. Такое преобразование называется *логарифмированием*.

Пример 1. Прологарифмировать по основанию 5 выражение $\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, где a, b, c — положительные числа.

Решение. Используя свойства логарифмов (см. п. 120), получим $\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 (125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} = \log_5 125 +$

$$+ \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^{\frac{1}{2}} = 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - \frac{1}{2}\log_5 c.$$

Часто приходится решать обратную задачу: находить выражение по его логарифму. Такое преобразование называется *потенцированием*.

Пример 2. Найти x, если $\log_3 x = 2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 8 - 3\log_3 10$.

Решение. $\log_3 x = \log_3 25 + \log_3 8^{\frac{1}{2}} - \log_3 10^3 =$

$$= \log_3 \frac{25 \cdot 2\sqrt{2}}{1000} = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}.$$

Из равенства $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ находим, что $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$.

123. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. Если основание логарифма равно 10, то логарифм называется *десятичным*. Вместо записи $\log_{10} x$ принята запись $\lg x$. На рисунке 67 изображены графикн функций $y=10^x$ и $y=\lg x$.

В частности, для десятичных логарнфмов справедливы равенства:

$$10^{\lg a}=a$$

$$\lg 1=0, \qquad \lg 0{,}1=-1,$$
$$\lg 10=1, \qquad \lg 0{,}01=-2,$$
$$\lg 100=2, \qquad \lg 0{,}001=-3,$$
$$\lg 1000=3, \qquad \lg 0{,}0001=-4,$$

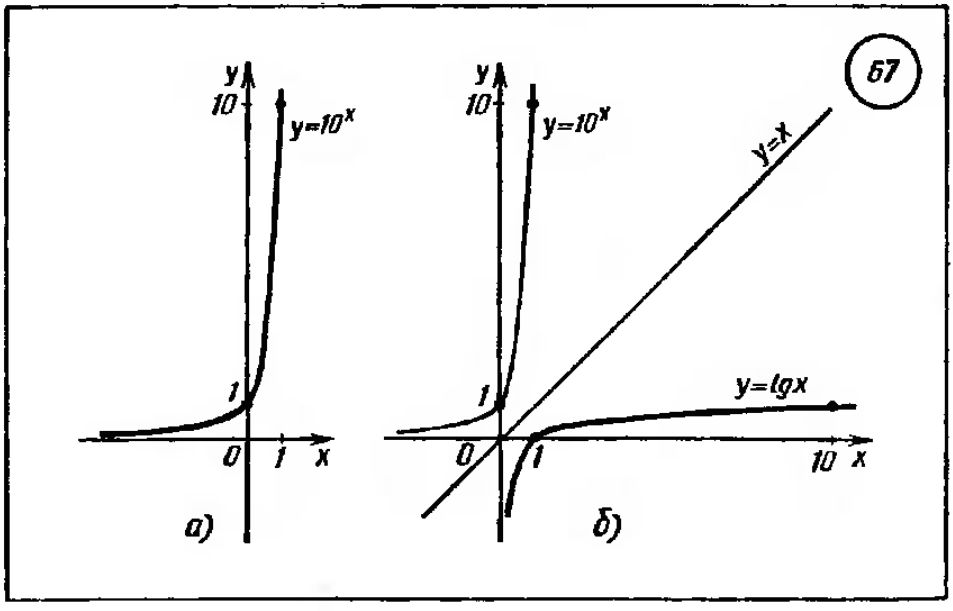
$$\lg 10^n=n.$$

Пусть положительное число a представлено в стандартном виде (см. п. 34): $a=a_1\cdot 10^n$, где $1\leqslant a_1<10$, $n\in Z$ (n — порядок числа a). Прологарифмируем число a по основанию 10, воспользовавшись свойствами логарифма (см. п. 120).

Имеем $\lg a=\lg(a_1\cdot 10^n)=\lg a_1+\lg 10^n=\lg a_1+n$. Итак,

$$\lg a=\lg a_1+n. \qquad (1)$$

Поскольку $1\leqslant a_1<10$, то $\lg 1\leqslant\lg a_1<\lg 10$, т. е. $0\leqslant\lg a_1<1$. Поэтому из равенства (1) следует, что n есть наибольшее целое число, не превосходящее число $\lg a$, иначе n есть целая часть числа $\lg a$, т. е. $n=[\lg a]$ (см. п. 31). Слагаемое $\lg a_1$ есть дробная часть числа $\lg a$, т. е. $\lg a_1=$



$=\{\lg a\}$ (см. п. 31). Целая часть числа $\lg a$, т. е. порядок числа a, называется *характеристикой* $\lg a$, а дробная часть числа $\lg a$ — его *мантиссой*.

Имеет место следующее утверждение: *если число $a>0$ умножить на 10^k, где k — целое число, то мантисса логарифма не изменится*, иными словами, $\lg a$ и $\lg(a\cdot 10^k)$ имеют одинаковые мантиссы.

В самом деле, имеем:

$$\lg(a\cdot 10^k)=\lg a+\lg 10^k=\lg(a_1\cdot 10^n)+k=\lg a_1+n+k.$$

Мантиссой числа $\lg(a\cdot 10^k)$ является $\lg a_1$, т. е. то же число, которое служит мантиссой для $\lg a$.

§ 13. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

124. Тригонометрические выражения. Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, называют *тригонометрическим*. Для преобразования тригонометрических выражений используют свойства тригонометрических функций, отмеченные в п. 100—105 и формулы тригонометрии, указанные в п. 125—131.

125. Формулы сложения и вычитания аргументов. Для любых действительных чисел α и β справедливы формулы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{3}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{6}$$

Формула (5) верна при α, β, $\alpha+\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Формула (6) верна при α, β, $\alpha-\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. Имеем $\sin 75°=\sin(30°+45°)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha=30°$, $\beta=45°$, получим:

$$\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°.$$

Известно, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. п. 98). Значит, $\sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Итак, $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Пример 2. Упростить выражение $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

Решение. Воспользуемся для $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ формулами (3) и (1) и учтем, что $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Получим

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 3. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Решение. Имеем $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$. Воспользовавшись формулой (2) при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, получим:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Пример 4. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулой (5) и учтем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Имеем $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 7.$

126. Формулы приведения. Под *формулами приведения* понимают обычно формулы, сводящие значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in Z$, к функции аргумента α.

Пусть, например, нужно вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=$$

$$=\cos\alpha.$$

Аналогично $\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-$
$-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-$$

$$-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы приведения, эти формулы даны в следующей таблице:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

127. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Если в формуле (2) из п. 125 положить $\alpha=\beta=t$, то получим:

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1, \tag{1}$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}; \tag{2}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}. \tag{3}$$

Тождество (2) справедливо при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, а тождество (3) — при $t \neq \pi n$, $n \in Z$.

Равенства (1), (2), (3) связывают между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Известны еще два равенства, связывающие между собой различные тригонометрические функции одиого и того же аргумента. Это

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая эти равенства, получаем равенство

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \tag{4}$$

справедливое при $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Пример 1. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из формулы (1) получаем $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Подставив вместо $\sin t$ его значение, получим:

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{16}{25}$, значит, либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, т. е. аргумент t принадлежит III четверти. Но в III четверти косинус отрицателен, значит, из двух указанных выше возможностей выбираем одну: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Зная $\sin t$ и $\cos t$, находим $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$$

Итак, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 2. Известно, что $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, иричем $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$.

Решение. Из формулы (3) находим $\sin^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}$.

Подставив вместо $\operatorname{ctg} t$ его значение, получим:

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

Итак, $\sin^2 t = \frac{144}{169}$. Значит, либо $\sin t = \frac{12}{13}$, либо $\sin t = -\frac{12}{13}$. По условию $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Значит, t принадлежит II четверти, а во II четверти синус положителен. Поэтому из двух указанных возможностей выбираем одну: $\sin t = \frac{12}{13}$.

Для отыскания значения $\cos t$ воспользуемся определением котангенса: $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Из этого равенства находим:

$$\cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$

Осталось вычислить значение $\operatorname{tg} t$. Из равенства $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}$ находим, что $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$.

Итак,

$$\sin t = \frac{12}{13}, \quad \cos t = -\frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}.$$

128. Формулы двойного угла. Если в формулах (3), (1), (5) из п. 125 положить $\alpha = t$, $\beta = t$, то получим следующие тождества:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \tag{1}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \tag{3}$$

С помощью формул (1), (2) и (3) можно выразить синус, косинус, тангенс любого аргумента через тригонометрические функции вдвое меньшего аргумента. Например, справедливы следующие равенства:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 5x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

В ряде случаев полезным оказывается использование полученных формул «справа налево», т. е. замена выражения $2\sin t\cos t$ выражением $\sin 2t$ (или выражения $\sin t\cos t$ выражением $\frac{\sin 2t}{2}$), выражения $\cos^2 t-\sin^2 t$ выражением $\cos 2t$ и, наконец, выражения $\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$ выражением $\operatorname{tg} 2t$.

Пример. Упростить выражение $\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t$.

Решение. $\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t=\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin t\cos t}=$

$=-\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t}=-2\frac{\cos 2t}{\sin 2t}=-2\operatorname{ctg} 2t.$

129. Формулы понижения степени. Зная, что $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ (см. п. 127), а $\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$ (см. п. 128), находим, что

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично находим, что

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) называются *формулами понижения степени*. Они позволяют преобразовывать $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$ в выражения, содержащие первую степень косинуса двойного аргумента. Например, используя формулы (1) и (2), можем получить следующие равенства:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)}{2}.$$

Формулы используются и «справа налево» для преобразования сумм $1+\cos 2t$, $1-\cos 2t$ в произведения. Например, верны следующие равенства: $1+\cos 5x=2\cos^2\frac{5x}{2}$, $1-\cos(\alpha+\beta)=2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Пример 1. Доказать тождество $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

Решение. Знаменатель правой части преобразуем по формуле (1), а числитель — по формуле синуса двойного угла (см. п. 128). Получим $\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\sin^4 x+\cos^4 x$, если известно, что $\cos 2x=\frac{5}{13}$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$ и $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2$, применим формулы понижения степени. Получим $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+$

$$+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{1+\frac{25}{169}}{2}=\frac{97}{169}.$$

130. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Имеют место следующие формулы:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пример 1. Преобразовать в произведенне $\cos 48^\circ-\cos 12^\circ$.

Решение. Применив формулу разности косинусов при $\alpha=48^\circ$, $\beta=12^\circ$, получим:

$$\cos 48^\circ-\cos 12^\circ=-2\sin\frac{48^\circ+12^\circ}{2}\sin\frac{48^\circ-12^\circ}{2}=$$

$$=-2\sin 30^\circ\sin 18^\circ.$$

Поскольку $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то окончательно получим:

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\sin 18^\circ.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $\sin x + \cos 2x - \sin 3x$.

Решение. Имеем $\sin x + \cos 2x - \sin 3x = \cos 2x - (\sin 3x - \sin x) = \cos 2x - 2 \sin x \cos 2x =$

$$= 2 \cos 2x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) = 2 \cos 2x \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x \right) = 2 \cos 2x \times$$

$$\times 2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x}{2} = 4 \cos 2x \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} \right).$$

131. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Справедливы следующие формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)}{2}. \quad (3)$$

Пример. Преобразовать в сумму произведение $\sin 43^\circ \cos 19^\circ$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1) при $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 19^\circ$, получим:

$$\sin 43^\circ \cos 19^\circ = \frac{\sin (43^\circ - 19^\circ) + \sin (43^\circ + 19^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 24^\circ + \sin 62^\circ).$$

132*. Преобразование выражения $a \cos t + b \sin t$ к виду $A \sin (t + \alpha)$. Любое выражение вида $a \cos t + b \sin t$ можно представить в виде $A \sin (t + \alpha)$. Для этого вынесем за скобки выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$ и получим:

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right).$$

Но $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$. Это значит, что точка с коорди-

натами $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ лежит на единичной окружности, поэтому существует такое α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha.$$

Обозначив для краткости $\sqrt{a^2+b^2}$ через A, получаем:

$$a\cos t+b\sin t=A(\sin\alpha\cos t+\cos\alpha\sin t).$$

Применив к выражению в скобках формулу (3) из п. 125, получим:

$$a\cos t+b\sin t=A\sin(t+\alpha).$$

Числа a, b, A, α связаны друг с другом соотношениями

$$a=A\sin\alpha,\ b=A\cos\alpha,\ A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Например, $3\sin 2t+4\cos 2t=5\sin(2t+\alpha)$, где $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

133*. Примеры преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Упростить выражение $\cos(\arcsin x)$, где $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. Положим $\arcsin x=y$. Тогда $\sin y=x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Нужно найти $\cos y$.

Известно, что $\cos^2 y=1-\sin^2 y$, значит, $\cos^2 y=1-x^2$. Но $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает лишь неотрицательные значения. Поэтому $\cos y=\sqrt{1-x^2}$, т. е. $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Положим $\alpha=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тогда $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Нужно вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Имеем $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, значит, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5}$. Так как, далее, $1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, то $1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=5$, откуда $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=4$, т. е. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$ или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$.

По условию $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, значит, $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, а в интервале $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$. Итак, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$, т. е.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=2.$$

Пример 3. Доказать, что для любого x из $[-1;\ 1]$ справедливо тождество

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x. \qquad (1)$$

Решение. Вычислим значение синуса левой и правой части проверяемого равенства:

$$\sin(\arcsin x)=x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

Синусы, как мы видим, равны, поэтому, чтобы убедиться в справедливости равенства (1), осталось показать, что $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y=\sin x$ (без проверки этого условия можно получить неверный результат, ведь тригонометрические функции могут принимать одинаковые значения и для различных значений аргумента, например, $\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$, но $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$).

Имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Далее, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, а поэтому $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x<\frac{\pi}{2}$. Итак, $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ принадлежат одному промежутку монотонности $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ функции $y=\sin x$. Теперь можно считать, что тождество (1) доказано.

Аналогично можно доказать, что

$$\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x.$$

ГЛАВА V. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 14. Уравнения с одной переменной

134. Определение уравнения. Корни уравнения. Равенство с переменной $f(x)=g(x)$ называется *уравнением с одной переменной* x. Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения*. Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Уравнение $3+x=7$ имеет единственный корень 4, так как при этом и только при этом значении переменной $3+x=7$ — верное равенство.

Пример 2. Уравнение $(x-1)(x-2)=0$ имеет два корня: 1 и 2.

Пример 3. Уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что можно говорить и о мнимых корнях уравнений. Так, уравнение $x^2+1=0$ имеет два мнимых корня: $x_1=i$, $x_2=-i$ (см. п. 47). Всюду ниже речь идет только о *действительных корнях* уравнений.

135. Равносильность уравнений. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $x+2=5$ и $x+5=8$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень — число 3. Равносильны и уравнения $x^2+1=0$ и $2x^2+5=0$ — ни одно из них не имеет корней.

Уравнения $x-5=1$ и $x^2=36$ неравносильны, так как первое имеет только один корень $x=6$, тогда как второе имеет два корня: 6 и -6.

В процессе решения уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Т.5.1. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $x^2+2=3x$ равносильно уравнению $x^2+2-3x=0$.

Т.5.2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $\frac{x^2-1}{3}=2x$ равносильно уравнению $x^2-1=6x$ (обе части первого уравнения мы умножили на 3).

136. Линейные уравнения. *Линейным уравнением с одной переменной x* называют уравнение вида $ax=b$, где a и b — действительные числа; a называют *коэффициентом при переменной, b — свободным членом.*

Для линейного уравнения $ax=b$ могут представиться три случая:

1) $a\neq 0$; в этом случае корень уравнения равен $\frac{b}{a}$;

2) $a=0$, $b=0$; в этом случае уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, что верно при любом x, т. е. корнем уравнения служит любое действительное число;

3) $a=0$, $b\neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0\cdot x=b$, оно не имеет корней.

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1}{5}x+\frac{2}{15}=0$.

Решение. По теореме 5.1 (п. 135) данное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{5}x=-\frac{2}{15}$. Если разделить обе части этого уравнения на коэффициент при x, то по теореме 5.2 получим равносильное данному уравнение $x=-\frac{2}{15}:\frac{1}{5}$, т. е. $x=-\frac{2}{3}$. Итак, $-\frac{2}{3}$ — корень уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x}{12}-1$.

Решение. Это уравнение сводится к линейному уравнению. Умножив обе части уравнения на 12 (наименьшее общее кратное знаменателей 3, 4, 6, 12), получим:

$$12\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}\right)=12\left(\frac{5x}{12}-1\right)$$

и далее

$$8+3x+2-2x=5x-12,$$
$$8+2+12=5x-3x+2x,$$
$$4x=22,$$
$$x=5{,}5.$$

137. Квадратные уравнения. Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a\neq 0$, называют *квадратным уравнением.* Если $a=1$, то квадратное уравнение называют *приведенным;* если $a\neq 1$,— то *неприведенным.* Числа a, b, c носят следующие названия: a — *первый коэффициент,* b — *второй коэффициент,* c — *свободный член.*

Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ находят по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Выражение $D=b^2-4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (1). *Если $D<0$, то уравнение (1) не имеет действительных корней; если $D=0$, то уравнение имеет один действительный корень; если $D>0$, то уравнение имеет два действительных корня.*

В случае, когда $D=0$, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.

Используя обозначение $D=b^2-4ac$, можно переписать формулу (2) в виде $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Если $b=2k$, то формула (2) принимает вид:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Итак, $x=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$, где $k=\dfrac{b}{2}$. (3)

Формула (3) особенно удобна в тех случаях, когда $\dfrac{b}{2}$ — целое число, т. е. коэффициент b — четное число.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2-5x+2=0$.

Решение. Здесь $a=2$, $b=-5$, $c=2$. Имеем $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=9$. Так как $D>0$, то уравнение имеет два корня, которые мы найдем по формуле (2):

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}.$$

Итак, $x_1=\dfrac{5+3}{4}=2$, $x_2=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{1}{2}$ — корни заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2-6x+9=0$.

Решение. Здесь $a=1$, $b=-6$, $c=9$. По формуле (3)

находим $x=\frac{3\pm\sqrt{9-9\cdot1}}{1}=\frac{3\pm0}{1}=3$, т. е. $x=3$ — корень уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2-3x+5=0$.

Решение. Здесь $a=2$, $b=-3$, $c=5$. Находим дискриминант $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot5=-31$. Так как $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

138. Неполные квадратные уравнения. Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называют *неполным*. Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения — проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2-5x=0$.

Решение. Имеем $x(2x-5)=0$. Значит, либо $x=0$, либо $2x-5=0$, т. е. $x=2{,}5$. Итак, уравнение имеет два корня: 0 и 2,5.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2-10=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 3, получим $x^2-\frac{10}{3}=0$, т. е. $\left(x-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)=0$. Значит, либо $x-\sqrt{\frac{10}{3}}=0$, откуда $x=\sqrt{\frac{10}{3}}$; либо $x+\sqrt{\frac{10}{3}}=0$, откуда $x=-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Итак, уравнение имеет два корня: $\sqrt{\frac{10}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2+5=0$.

Решение. Поскольку $2x^2+5>0$ при любых x, то уравнение $2x^2+5=0$ не имеет корней.

139. Теорема Виета.

Т.5.3. Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, т. е.

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1x_2=q \qquad (1)$$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).

Выведем еще некоторые соотношения между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Найдем сумму квадратов корней: $x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

Воспользовавшись формулами (1), получим:

$$x_1^2+x_2^2=p^2-2q. \qquad (2)$$

Рассмотрим сумму кубов корней. Имеем:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2).$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), получим:

$$x_1^3+x_2^3=-p(p^2-3q).$$

Справедлива теорема, обратная теореме Виета.

Т.5.4. Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

Пример 1. Решить уравнение $x^2-9x+14=0$.

Решение. Попробуем найти два числа x_1 и x_2, такие, что

$$x_1+x_2=9,$$
$$x_1x_2=14.$$

Такими числами являются 2 и 7. По теореме 5.4. они и служат кориями заданного квадратного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2+3x-28=0$.

Решение. Попробуем найти такие два числа x_1 и x_2, чтобы выполнялись равенства

$$x_1+x_2=-3,$$
$$x_1x_2=-28.$$

Нетрудно заметить, что такими числами будут -7 и 4. Они и являются корнями заданного уравнения.

140. Системы и совокупности уравнений. Рассмотрим уравнение

$$(x^3-1)^2+((x-1)(x-2))^2=0.$$

Ясно, что $(x^2-1)^2\geqslant 0$ и $((x-1)(x-2))^2\geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $(x^2-1)^2=0$ и $((x-1)(x-2))^2=0$, а затем найти их общие корни. Корнями уравнения $(x^2-1)^2=0$ служат числа 1 и -1, а корнями уравнения $((x-1)(x-2))^2=0$ — числа 1 и 2.

Общим является число 1 — это корень исходного уравнения.

В случае, когда нужно найти значения переменной, удовлетворяющие обоим заданным уравнениям, говорят, что задана *система уравнений*. Для обозначения системы используется фигурная скобка:

$$\begin{cases} (x^2-1)^2=0, \\ ((x-1)(x-2))^2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь уравнение $(x^2-1)(x^2-4)=0$. Произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $x^2-1=0$ и $x^2-4=0$, а затем объединить их корни. Корнями первого уравнения являются числа 1 и -1, а корнями второго — числа 2 и -2. Значит, 1, -1, 2, -2 — корни исходного уравнения.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений. Для обозначения совокупности иногда используется квадратная скобка:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1=0, \\ x^2-4=0. \end{array}\right.$$

141. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля. Модуль числа a определяется следующим образом (см. п. 26).

$$|a|=\begin{cases} a \text{ при } a\geqslant 0, \\ -a \text{ при } a<0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $|3x-5|=2$.

Решение. Если $|a|=2$, то либо $a=2$, либо $-a=2$. Это значит, что заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $3x-5=2$; $-(3x-5)=2$. Из уравнения $3x-5=2$ находим $x_1=\frac{7}{3}$; из уравнения $-(3x-5)=2$ находим $x_2=1$.

Ответ: $x_1=\frac{7}{3}$, $x_2=1$.

Пример 2. Решить уравнение $|2x-8|=3x+1$.

Решение. Если $2x-8\geqslant 0$, то $|2x-8|=2x-8$ и данное уравнение примет вид $2x-8=3x+1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8\geqslant 0, \\ 2x-8=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $2x-8=3x+1$ находим $x=-9$. Однако при этом значении переменной неравенство $2x-8\geqslant 0$ не выполняется,

значит, найденное значение не может быть корнем данного уравнения.

Если $2x-8<0$, то $|2x-8|=-(2x-8)$ и данное уравнение примет вид $8-2x=3x+1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8<0, \\ 8-2x=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $8-2x=3x+1$ находим $x=\frac{7}{5}$. Неравенство $2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)-8<0$ верно, значит, $x=\frac{7}{5}$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x=\frac{7}{5}$.

Уравнение вида $|x-a|=b$ можно решать и геометрически (см. п. 26).

142. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни. Пусть даны два уравнения

$$f_1(x)=g_1(x), \quad (1)$$
$$f_2(x)=g_2(x). \quad (2)$$

Если каждый корень уравнения (1) является одновременно и корнем уравнения (2), то уравнение (2) называется *следствием уравнения* (1). Заметим, что равносильность уравнений означает, что каждое из уравнений является следствием другого.

В процессе решения уравнения часто приходится применять такие преобразования, которые приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но, кроме них, уравнение-следствие может иметь и такие решения, которые не являются корнями исходного уравнения, это так называемые *посторонние* корни. Чтобы выявить и отсеять посторонние корни, обычно поступают так: все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение.

Если при решении уравнения мы заменили его уравнением-следствием, то указанная выше проверка является неотъемлемой частью решения уравнения. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в следствие.

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=g(x) \quad (3)$$

и умножим обе его части на одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл при всех значениях x. Получим уравнение

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), \quad (4)$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни уравнения $h(x)=0$. Значит, уравнение (4) есть следствие уравнения (3). Ясно, что уравнения (3) и (4) равносильны, если «постороннее» уравнение $h(x)=0$ не имеет корней.

Итак, *если обе части уравнения умножить на выражение $h(x)$, имеющее смысл при любых значениях x, то получится уравнение, являющееся следствием исходного.* Полученное уравнение будет равносильно исходному, если уравнение $h(x)=0$ не имеет корней. Заметим, что обратное преобразование, т. е. переход от уравнения (4) к уравнению (3) путем деления обеих частей уравнения (4) на выражение $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере решений (в этом случае могут «потеряться» корни уравнения $h(x)=0$). Например, уравнение $(x-2)(x-3)=2(x-3)$ имеет два корня: 3 и 4. Деление же обеих частей уравнения на $x-3$ приводит к уравнению $x-2=2$, имеющему только один корень 4, т. е. произошла потеря корня.

Снова возьмем уравнение (3) и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение

$$(f(x))^2=(g(x))^2, \qquad (5)$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни «постороннего» уравнения $f(x)=-g(x)$, т. е. уравнение (5) — следствие уравнения (3).

Например, уравнение $x-1=3$ имеет корень 4. Если обе части уравнения $x-1=3$ возвести в квадрат, то получится уравнение $(x-1)^2=9$, имеющее два корня: 4 и -2. Значит, уравнение $(x-1)^2=9$ — следствие уравнения $x-1=3$. При переходе от уравнения $x-1=3$ к уравнению $(x-1)^2=9$ появился посторонний корень $x=2$.

Итак, *при возведении обеих частей уравнения в квадрат (и вообще в любую четную степень) получается уравнение, являющееся следствием исходного.* Значит, при указанном преобразовании возможно появление посторонних корней. Заметим, что возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечетную степень приводит к уравнению, равносильному данному.

143. Уравнения с переменной в знаменателе. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{p(x)}{q(x)}=0. \qquad (1)$$

Решение уравнения вида (1) основано на следующем утверждении: дробь $\frac{m}{n}$ равна нулю тогда и только тогда, когда ее

числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля (на 0 делить нельзя!). Записывают это так: $\begin{cases} m=0, \\ n\neq 0. \end{cases}$

В соответствии со сказанным решение уравнения $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ проводится в два этапа: сначала нужно решить уравнение $p(x)=0$, а затем для каждого корня выяснить, обращается ли при найденном значении переменной x знаменатель $q(x)$ в нуль. Если $q(x)\neq 0$, то найденный корень уравнения $p(x)=0$ является и корнем уравнения (1); если $q(x)=0$, то полученный корень уравнения $p(x)=0$ не является корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение $p(x)=0$ является следствием (см. п. 142) уравнения $\frac{p(x)}{q(x)}=0$. При переходе от уравнения $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ к уравнению $p(x)=0$ (этот переход называется *освобождением от знаменателя*) могут появиться посторонние корни. Отсеять их можно с помощью условия $q(x)\neq 0$ (или с помощью непосредственной подстановки каждого корня уравнения $p(x)=0$ в уравнение (1)).

Пример. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$.

Решение. Из уравнения $3x-6=0$ находим $x=2$. Так как при $x=2$ знаменатель x^2-x-2 обращается в нуль, то заданное уравнение не имеет корней.

144. Область определения уравнения. *Областью определения уравнения* $f(x)=g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x, при которых и выражение $f(x)$, и выражение $g(x)$ имеют смысл.

Пример. Найти область определения уравнения:

а) $x^2-5x=1+2x$; б) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-2}=3$;

в) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x-2}$; г) $\log_3(x-3)=\log_3(5-x)$.

Решение. а) Выражения x^2-5x и $1+2x$ определены при всех x. Значит, область определения уравнения — вся числовая прямая.

б) Выражение $\frac{x}{x-1}$ не определено при $x=1$, а выражение $\frac{1}{x-2}$ не определено при $x=2$. Значит, область определения уравнения можно задать условиями: $x\neq 1$, $x\neq 2$.

в) Корень четной степени имеет смысл лишь при неотрицательных значениях подкоренного выражения. Значит, одновременно должны выполняться условия: $x \geqslant 0$, $x-1 \geqslant 0$ и $x-2 \geqslant 0$. Все эти неравенства справедливы при $x \geqslant 2$, т. е. $[2; +\infty)$ — область определения уравнения.

г) Логарифм имеет смысл лишь в случае положительного числа под знаком логарифма. Значнт, должны одновременно выполняться два иеравенства: $x-3>0$, откуда $x>3$, и $5-x>0$, откуда $x<5$. Итак, $(3; 5)$ — область определения уравнения.

Ясно, что корни уравнения $f(x)=g(x)$ должны принадлежать его области определенння. Но иногда бывает так, что в процессе преобразований уравнения его область определения меняется (чаще всего она расшнряется) и из найденных в итоге всех преобразований значений переменной одни значения принадлежат области определения уравнення $f(x)=g(x)$, а другие не принадлежат. Тогда первые являются корнями уравнения, а вторые нет (это посторонние корни).

Так, при решении уравнения $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$ (п. 143), область определения которого задается условием $x^2-x-2 \neq 0$, мы перешли к уравнению $3x-6=0$, областью определения которого является вся числовая прямая (область определения расширилась). Уравнение $3x-6=0$ имеет корень $x=2$, который не принадлежит области определенння исходного уравнения и, следовательно, является посторонним корнем.

Общий вывод таков: *если в процессе преобразований уравнения его область определения расширилась, то могут появиться посторонние корни.* Поэтому все найденные значения переменной надо проверить подстановкой в исходное уравнеиие или с помощью области определенння исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение $\lg(x-5)=\lg(2x-9)$. (1)

Решение. Если $\lg a=\lg b$, то в силу монотонности логарнфмической функции $a=b$ (если $a \neq b$, например, $a<b$, то и $\lg a \neq \lg b$, а нменно $\lg a<\lg b$). Значит, от заданного уравнеиия можно перейти к уравненню

$$x-5=2x-9, \qquad (2)$$

откуда находим $x=4$. Но при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения расширилась: в уравнении (1) она задается неравенством $x>5$, тогда как для уравнения (2) областью определения служит вся числовая прямая. Поэтому найденное значение $x=4$, являющееся корнем уравнения (2), может оказаться постороиним корнем для уравнения (1). В данном случае именно это и происходит, поскольку $x=4$ не принадлежит области определения уравнения (1) (не удовлет-

воряет неравенству $x>5$). Итак, $x=4$ — посторонний корень, т. е. заданное уравнение не имеет корней.

145. Рациональные уравнения. Уравнение $f(x)=g(x)$ называется *рациональным*, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения, то уравнение называется *целым;* если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ является дробным, то рациоиальное уравнение $f(x)=g(x)$ называется *дробным.*

Например, целыми являются линейные (п. 136), квадратные (п. 137) уравнения.

Чтобы решить рациональное уравнение, нужно:

1) найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;

2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

3) решить полученное целое уравнение;

4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общнй зиаменатель.

Пример. Решить уравнение $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$.

Решение. Общим знаменателем имеющихся дробей является $2x(2-x)$. Найдя дополнительные множители для каждой дроби, освободимся от знаменателей. Имеем:

$$\frac{\overbrace{2x}^{2}}{2-x}+\frac{\overbrace{x(2-x)}^{1}}{2}=\frac{4^{2}}{x(2-x)};$$

$$4x+x(2-x)=8;$$

$$x^2-6x+8=0.$$

Из уравнеиия $x^2-6x+8=0$ находим $x_1=2$, $x_2=4$ (см. п. 137). Осталось проверить, обращают ли найденные корни в нуль выражение $2x(2-x)$, т. е. проверить выполнение условия $2x(2-x)\neq 0$. Замечаем, что 2 не удовлетворяет этому условию, а 4 удовлетворяет. Значит, $x=4$ — единственный корень уравиения.

146. Решение уравнения $p(x)=0$ методом разложения его левой части на множители. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение $p(x)=0$, где $p(x)$ — многочлен степени n. Предположим, что нам удалось разложить многочлен на множители: $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — многочлены более низкой степени, чем n. Тогда уравнение $p(x)=0$ принимает вид $p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)=0$. Если a — корень уравнения $p(x)=0$, то $p_1(a)\,p_2(a)\,p_3(a)=0$, а потому хотя бы одно из чисел $p_1(a)$, $p_2(a)$, $p_3(a)$ равно нулю.

Значит, a — корень хотя бы одного из уравнений

$$p_1(x)=0,\ p_2(x)=0,\ p_3(x)=0.$$

Верно и обратное: если $x=b$ — корень хотя бы одного из уравнений $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_2(x)=0$, то b — корень уравнения $p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_2(x)=0$, т. е. уравнения $p(x)=0$.

Итак, если $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — многочлены, то вместо уравнения $p(x)=0$ нужно решить совокупность уравнений $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$. Все найденные корни этих уравнений, и только они, будут корнями уравнения $p(x)=0$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3+2x^2+3x+6=0$.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Имеем $x^2(x+2)+3(x+2)=0$, откуда $(x+2)(x^2+3)=0$. Значит, либо $x+2=0$, либо $x^2+3=0$. Из первого уравнения находим $x=-2$, второе уравнение не имеет корней. Ответ: -2.

Метод разложения на множители применим к любым уравнениям вида $p(x)=0$, где $p(x)$ необязательно многочлен; пусть $p(x)=p_1(x)\,p_2(x)\,p_3(x)$, но среди выражений $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_2(x)$ есть выражения более сложного вида, чем многочлены (например, иррациональные, логарифмические и т. д.). Среди корней уравнений $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_2(x)=0$ могут быть посторонние для уравнения $p(x)=0$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2\sqrt{x}-9\sqrt{x}=0$.

Решение. Имеем $\sqrt{x}(x^2-9)=0$, значит, либо $\sqrt{x}=0$, либо $x^2-9=0$. Из уравнения $\sqrt{x}=0$ находим $x=0$, из уравнения $x^2-9=0$ находим $x=\pm 3$.

Но $x=-3$ не удовлетворяет исходному уравнению, так как при этом значении не определено выражение $\sqrt{x}$. Это посторонний корень.

Итак, уравнение имеет два корня: 3; 0.

147. Решение уравнений методом введения новой переменной. Суть этого метода поясним на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$.

Решение. Положив $x^2-3x=y$, получим уравнение $y^2+3y-28=0$, откуда находим $y_1=-7$, $y_2=4$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x^2-3x=-7;\quad x^2-3x=4,\ \text{т. е.}$$
$$x^2-3x+7=0;\quad x^2-3x-4=0.$$

Первое квадратное уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен.

Из второго квадратного уравнения находим $x_1=4$, $x_2=-1$. Это действительные корни заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

Решение. Положим $x^2+2x-3=y$, тогда $x^2+2x-8=(x^2+2x-3)-5=y-5$ и уравнение примет вид $\frac{24}{y-5}-\frac{15}{y}=2$.

Решив это уравнение (см. п. 145), получим $y_1=12{,}5$ и $y_2=-3$.

Но $y=x^2+2x-3$. Значит, нам остается решить уравнения

$$x^2+2x-3=12{,}5 \text{ и } x^2+2x-3=-3,$$

или $x^2+2x-15{,}5=0$ и $x^2+2x=0$.

Из первого уравнения находим $x_1=\frac{-2+\sqrt{66}}{2}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{66}}{2}$; из второго уравнения получаем $x_3=0$, $x_4=-2$.

Тем самым найдены четыре корня заданного уравнения.

148. Биквадратные уравнения. *Биквадратным* называется уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$. Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив $x^2=y$, придем к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$.

Пример. Решить уравнение $x^4+4x^2-21=0$.

Решение. Положив $x^2=y$, получим квадратное уравнение $y^2+4y-21=0$, откуда находим $y_1=-7$, $y_2=3$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2=-7$, $x^2=3$. Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.

149. Решение задач с помощью составления уравнений. С помощью уравнений решаются многочисленные задачи, к которым приводят самые разнообразные вопросы физики, механики, экономики и многих других прикладных наук. Прежде всего напомним общий порядок решения задач с помощью уравнений.

1) Вводят переменные, т. е. буквами x, y, z обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2) С помощью введенных переменных и данных в задаче чисел и их соотношений составляют систему уравнений (или одно уравнение).

3) Решают составленную систему уравнений (или уравнение) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4) Если буквами x, y, z обозначили ие искомые величины, то с помощью полученных решений иаходят ответ на вопрос задачи.

Задача 1. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправностн дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно потребовались 4 машины. Какое колнчество машин было затребовано первоначально?

Решение. Обозначим через x количество машин, затребованных первоначально. Тогда на самом деле было вызвано $(x+4)$ машин. Так как надо было перевезти 60 т груза, то предполагалось, что на одну машину будут грузить $\frac{60}{x}$ тонн груза, а на самом деле грузилн $\frac{60}{x+4}$ тонн груза, что на 0,5 т меньше, чем предполагалось. В результате мы приходим к уравнению

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+4}=0{,}5.$$

Это уравненне имеет два корня: -24 и 20. Ясно, что по смыслу задачи — 24 не подходнт. Таким образом, первоначально было затребовано 20 машин.

Задача 2. Моторная лодка, обладающая скоростью двнжения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратио без остановок за 6 ч 15 мнн. Расстояние между пунктами равно 60 км. Найти скорость течения реки.

Решеиие. Пусть x километров в час — скорость течения реки. Тогда лодка, обладающая собственной скоростью 20 км/ч, идет по течению со скоростью $(20+x)$ километров в час, а против течения со скоростью $(20-x)$ километров в час. Время, затраченное на путь по течению, составит $\frac{60}{20+x}$ часов, а время, затраченное на обратный путь, составит $\frac{60}{20-x}$ часов. Так как на путь туда и обратно затрачено 6 ч 15 мнн, т. е. $\frac{25}{4}$ ч, приходим к уравнению

$$\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4},$$

решая которое, находим два корня: $x=4$, $x=-4$. Ясно, что

значение $x=-4$ не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость течения реки равна 4 км/ч.

З а д а ч а 3. Найти двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Р е ш е н и е. Напомним, что любое двузначное число может быть записано в виде $10x+y$, где x — цифра десятков, а y — цифра единиц. Согласно условию если x — цифра десятков, то цифра единиц равна $x+2$, и мы получаем

$$(10x+(x+2))(x+(x+2))=144.$$

Решив это уравнение, находим $x_1=2$, $x_2=-3\frac{2}{11}$. Второй корень не подходит по смыслу задачи.

Итак, цифра десятков равна 2, цифра единиц равна 4; значит, искомое число равно 24.

З а д а ч а 4. Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Р е ш е н и е. Прежде чем решать эту задачу (или другие аналогичные задачи «на работу»), заметим следующее: производительность труда, т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени (обозначим ее через A), и время, необходимое для выполнения всей работы (обозначим его через t),— взаимно обратные величины, т. е. $At=1$. Поэтому если обозначить через x часов время, необходимое для выполнения всей работы первому рабочему, а через $(x+5)$ часов — второму, то часть работы, выполняемая первым рабочим за 1 ч, равна $\frac{1}{x}$, а часть работы, выполняемая вторым за 1 ч, равна $\frac{1}{x+5}$. Согласно условию они, работая вместе, выполнили всю работу за 6 ч. Часть работы, выполненная за 6 ч первым рабочим, есть $\frac{6}{x}$, а часть работы, выполненная за 6 ч вторым рабочим, есть $\frac{6}{x+5}$. Поскольку вместе они выполнили всю работу, т. е. доля выполненной работы равна 1, то мы получаем уравнение

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1,$$

решив которое найдем $x=10$.

Итак, первый рабочий может выполнить всю работу за 10 ч, а второй — за 15 ч.

Задача 5. Из сосуда емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

Решение. Пусть в первый раз было вылито x литров кислоты. Тогда в сосуде осталось $(54-x)$ литров кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54-x)$ литров кислоты. Значит, в 1 л смеси содержится $\frac{54-x}{54}$ литров кислоты (концентрация раствора). Во второй раз из сосуда вылили x литров смеси, в этом количестве смеси содержалось $\frac{54-x}{54}\cdot x$ литров кислоты. Таким образом, в первый раз было вылито x литров кислоты, во второй $\frac{54-x}{54}\cdot x$ литров кислоты, а всего за два раза вылито $54-24=30$ литров кислоты. В результате приходим к уравнению

$$x+\frac{54-x}{54}\cdot x=30.$$

Решив это уравнение, найдем два корня: $x_1=90$ и $x_2=18$. Ясно, что значение 90 не удовлетворяет условию задачи.

Итак, в первый раз было вылито 18 л кислоты.

Задача 6. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение. Пусть масса добавленного олова составляет x килограммов. Тогда получится сплав массой $(12+x)$ килограммов, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $0{,}4\,(12+x)$ килограммов меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т. е. меди в нем было $0{,}45\cdot 12$ кг. Так как масса меди и в имевшемся, и в новом сплаве одна и та же, то приходим к уравнению

$$0{,}4\,(12+x)=0{,}45\cdot 12.$$

Решив это уравнение, получим $x=1{,}5$. Таким образом, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Задача 7. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Р е ш е н и е. Пусть масса стали первого сорта равна x тонн, тогда стали второго сорта надо взять $(140-x)$ тонн. Содержание никеля в стали первого сорта составляет 5%; значит, в x тоннах стали первого сорта содержится $0{,}05x$ тонн никеля. Содержание никеля в стали второго сорта составляет 40%; значит, в $(140-x)$ тоннах стали второго сорта содержится $0{,}4(140-x)$ тонн никеля. По условию после соединения взятых двух сортов должно получиться 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля, т. е. после переплавки в полученной стали должно быть $0{,}3\cdot 140$ т никеля. Но это количество никеля складывается из $0{,}05x$ тонн, содержащихся в стали первого сорта, и из $0{,}4(140-x)$ тонн, содержащихся в стали второго сорта. Таким образом, приходим к уравнению

$$0{,}05x+0{,}4(140-x)=0{,}3\cdot 140,$$

из которого находим $x=40$. Следовательно, надо взять 40 т стали с 5%-ным и 100 т стали с 40%-ным содержанием никеля.

150. Иррациональные уравнения. *Иррациональным* называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Так, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2}=2x-1$, $x^{\frac{1}{3}}-5=0$ и т. д.

Рассмотрим два метода решения иррациональных уравнений: метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень и метод введения новых переменных (см. п. 147).

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду

$$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)};$$

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень:

$$(\sqrt[n]{f(x)})^n=(\sqrt[n]{g(x)})^n;$$

в) учитывая, что $(\sqrt[n]{a})^n=a$, получают уравнение

$$f(x)=g(x);$$

г) решают уравнение и делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней (см. п. 142). Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[6]{x-3}=2$.

Решение. Возведем обе части уравнения в шестую степень, получим $x-3=64$, откуда $x=67$.

Проверка. Подставив 67 вместо x в данное уравнение, получим $\sqrt[6]{67-3}=2$, т. е. $2=2$ — верное равенство.

Ответ: 67.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}$$

и возведем обе части его в квадрат. Получим:

$$(\sqrt{2x+6})^2=(6-\sqrt{x-1})^2;$$

далее

$$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1, \text{ т. е.}$$

$$12\sqrt{x-1}=29-x.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат:

$$144(x-1)=(29-x)^2, \text{ т. е. } x^2-202x+985=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=197$.

Проверка. 1) При $x=5$ имеем:

$$\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6.$$

Таким образом, $x=5$ является корнем заданного уравнения.

2) $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$. Таким образом, $x=197$ — посторонний корень.

Ответ: 5.

Пример 3. Решить уравнение $(x-2)^{\frac{2}{5}}-(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$.

Решение. Применим метод введения новой переменной. Положим $y=(x-2)^{\frac{1}{5}}$. Тогда $(x-2)^{\frac{2}{5}}=y^2$, и мы получаем уравнение $y^2-y-2=0$, откуда находим $y_1=2$, $y_2=-1$.

Теперь задача свелась к решению двух уравнений: $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$; $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$. Возведя обе части уравнения $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$ в пятую степень, получим $x-2=32$, откуда $x=34$.

Уравнение $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$ не имеет корней, поскольку под знаком возведения в дробную степень может содержаться только неотрицательное число, а любая степень неотрицательного числа неотрицательна.

Ответ: 34.

151. Показательные уравнения. *Показательное* уравнение вида

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},$$

где $a>0$, $a\neq 1$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Имеются два основных метода решения показательных уравнений: 1) метод уравнивания показателей, т. е. преобразование заданного уравнения к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, а затем к виду $f(x)=g(x)$; 2) метод введения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $2^{3x^2+3}=2^{10x}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $3x^2+3=10x$, откуда находим $3x^2-10x+3=0$. Решив это квадратное уравнение, получим $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^{x-1}$.

Решение. Приведем все степени к одному основанию $\frac{1}{5}$. Получим уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right)^{x-1}$, которое преобразуем к виду $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$.

Полученное уравнение равносильно уравнению $x=2x-3$, откуда находим $x=3$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x+2^{x+1}-24=0$.

Решение. Применим метод введения новой переменной. Так как $4^x=(2^x)^2$, $2^{x+1}=2\cdot 2^x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$(2^x)^2+2\cdot 2^x-24=0.$$

Введем новую переменную, положив $2^x=y$. Получим квадратное уравнение $y^2+2y-24=0$ с корнями $y_1=4$, $y_2=-6$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $2^x=4$, $2^x=-6$.

Из первого уравнения находим, что $x=2$. Второе уравнение не имеет корней, так как $2^x>0$ при любых значениях x.

Ответ: 2.

152. Логарифмические уравнения. Простейшее *логарифмическое* уравнение имеет вид:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x), \text{ где } a>0,\ a\neq 1.$$

Чтобы решить уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, нужно:

1) решить уравнение $f(x)=g(x)$;

2) из найденных корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенствам $f(x)>0$ и $g(x)>0$; остальные корни урав-

нения $f(x)=g(x)$ являются посторонними для уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Имеются два осиовных метода решения логарифмических уравнений: 1) метод, заключающийся в преобразовании уравиения к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, затем к виду $f(x)=g(x)$; 2) метод введения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$.

Решение. Перейдем от заданного уравнения к уравнению $x^2-3x-5=7-2x$ и решим его. Имеем $x^2-x-12=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=4$. Проверку найденных значений x выполним с помощью неравенств $x^2-3x-5>0$ и $7-2x>0$. Число -3 этим неравенствам удовлетворяет, а число 4 нет. Значит, 4 — посторонний корень.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить уравненне $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$.

Решение. Воспользовавшись тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения (см. п. 120), преобразуем уравнение к виду

$$\lg(x+4)(2x+3)=\lg(1-2x)$$

и далее

$$(x+4)(2x+3)=1-2x.$$

Из последнего уравнения находим $x_1=-1$, $x_2=-5{,}5$.

Осталось сделать проверку. Ее можно выполнить с помощью системы неравенств $\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$

Подставив поочередно найденные значения -1 и $-5{,}5$ в эти неравенства, убеждаемся, что -1 удовлетворяет всем неравенствам, а $-5{,}5$ нет,— напримнер, при этом значенни не выполняется первое неравенство. Значит, $-5{,}5$ — посторонний корень.

Ответ: -1.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+1=\frac{7}{\log_{\frac{1}{2}} 0{,}5x}$.

Решение. Так как $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}5x=\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} 0{,}5=\log_{\frac{1}{2}} x-1$, то заданное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+1=\frac{7}{\log_{\frac{1}{2}} x-1}.$$

Введем новую переменную, положив $\log_2 x=y$. Получим $y^2+y+1=\frac{7}{y-1}$ и далее $(y-1)(y^2+y+1)=7$; $y^3-1=7$; $y^3=8$; $y=2$. Но $y=\log_2 x$, поэтому из уравнения $\log_2 x=2$ находим $x=4$.

Ответ: 4.

153. Примеры решения показательно-логарифмических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^{1-\lg x}=0{,}01. \tag{1}$$

Решение. Область определения уравнения: $x>0$. В этой области выражения, входящие в обе части уравнения (1), принимают только положительные значения; поэтому, прологарифмировав обе его части по основанию 10, получим уравнение

$$\lg x^{1-\lg x}=\lg 0{,}01,$$

равносильное уравнению (1). Далее имеем $(1-\lg x)\lg x=-2$.

Полагая $u=\lg x$, получим уравнение $(1-u)u=-2$, откуда $u_1=-1$, $u_2=2$. Остается решить совокупность уравнений $\lg x=-1$, $\lg x=2$. Из этой совокушности получим $x_1=0{,}1$, $x_2=100$— корни уравнения (1).

Здесь применен метод логарифмирования, заключающийся в переходе от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_x(3x^{\log_5 x}+4)=2\log_5 x. \tag{2}$$

Решение. Воспользовавшись определением логарифма, преобразуем уравнение (2) к виду

$$x^{2\log_5 x}=3x^{\log_5 x}+4.$$

Полагая $u=x^{\log_5 x}$, получим уравнение $u^2-3u-4=0$, корни которого $u_1=-1$, $u_2=4$.

Теперь задача сводится к решению следующей совокупности уравнений: $x^{\log_5 x}=-1$, $x^{\log_5 x}=4$. Так как $x^{\log_5 x}>0$, а $-1<0$, то первое уравнение совокупности не имеет решения. Прологарифмировав обе части второго уравнения совокупности по основанию 5, получим:

$$\log_5^2 x=\log_5 4, \text{ т. е. } \log_5 x=\pm\sqrt{\log_5 4},$$

откуда находим $x_{1,2}=5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$— корни уравнения (2).

154. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнение $\sin x=a$, где $|a|\leqslant 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению $\sin x=\frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$, $x_3=\frac{\pi}{6}+2\pi$, $x_4=\frac{\pi}{6}-2\pi$, $x_5=\frac{5\pi}{6}+2\pi$, $x_6=\frac{5\pi}{6}-2\pi$ и т. д. Общая формула, по которой находятся все корни уравнения $\sin x=a$, где $|a|\leqslant 1$, такова:

$$x\approx(-1)^n \arcsin a+\pi n. \qquad (1)$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения; в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются простейшие тригонометрические уравнения) n называют *параметром*. Записывают обычно $n\in Z$, подчеркивая тем самым, что параметр n может принимать любые целые значения.

Решения уравнения $\cos x=a$, где $|a|\leqslant 1$, находят по формуле

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z. \qquad (2)$$

Уравнение $\operatorname{tg} x=a$ решается по формуле

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in Z, \qquad (3)$$

а уравненне $\operatorname{ctg} x=a$ — по формуле

$$x=\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (4)$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ (см. п. 106), то окончательно получаем $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (2), получим:

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ (см. п. 107), то получаем $3x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$,

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим:

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}2+\pi n,$$

откуда находим:

$$x=2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in Z.$$

Заметим, что в некоторых случаях удобнее пользоваться частными формулами:

1) $\sin x=0;\ x=\pi n.$

2) $\sin x=1;\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

3) $\sin x=-1;\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

4) $\cos x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

5) $\cos x=1;\ x=2\pi n.$

6) $\cos x=-1;\ x=\pi+2\pi n.$

7) $\operatorname{tg}x=0;\ x=\pi n.$

8) $\operatorname{ctg}x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Во всех формулах n — любое целое число.

155. Методы решения тригонометрических уравнений. Имеются два основных метода решения тригонометрических уравнений: 1) метод разложения на множители; 2) метод введения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$.

Решение. Перенесем 1 в левую часть и, выполнив преобразования левой части, разложим ее на множители.

Применим к $\sin 5x+\sin x$ формулу для суммы синусов и воспользуемся тем, что $2\sin^2 x=1-\cos 2x$. Тогда уравнение примет вид $2\sin 3x\cos 2x+(1-\cos 2x)-1=0$ и далее $\cos 2x(2\sin 3x-1)=0$. Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений: $\cos 2x=0;\ 2\sin 3x-1=0$.

Из уравнения $\cos 2x=0$ находим $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Из уравнения $2\sin 3x-1=0$ находим $\sin 3x=\frac{1}{2}$ и далее $3x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k$; так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, то $3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$.

Таким образом, решение заданного уравнения таково:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ n\in Z,\ k\in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение $2\cos^2 x+14\cos x=3\sin^2 x$.

Решение. Так как $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, то уравнение можно переписать следующим образом:

$$2\cos^2 x+14\cos x-3(1-\cos^2 x)=0$$

и далее $5\cos^2 x+14\cos x-3=0$.

Положив $\cos x=y$, получим квадратное уравнение $5y^2+14y-3=0$. Решая это уравнение, находим $y_1=\frac{1}{5}$, $y_2=-3$. Значит, либо $\cos x=\frac{1}{5}$, откуда находим $x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, либо $\cos x=-3$ — это уравнение не имеет решений, так как $|\cos x|\leqslant 1$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, $n\in Z$.

Метод введения новой переменной полезен при решении так называемых *однородных* уравнений, т. е. уравнений вида

$a\sin x+b\cos x=0$ (однородное уравнение 1-й степени),

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (однородное уравнение 2-й степени).

Рассмотрим случай, когда $a\neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на $\cos x$, а обе части второго уравнения на $\cos^2 x$. В результате получим следующие уравнения, алгебраические относительно $\operatorname{tg} x$, а потому решаемые подстановкой $\operatorname{tg} x=y$:

$$a\operatorname{tg} x+b=0,$$
$$a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0.$$

При $a\neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\cos x=0$. Поэтому деление на $\cos x$ (или $\cos^2 x$) обеих частей однородного уравнения в случае $a\neq 0$ не приводит к потере корней.

Пример 3. Решить уравнение $8\sin x-7\cos x=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим $8\operatorname{tg} x-7=0$. Далее имеем $\operatorname{tg} x=\frac{7}{8}$, откуда $x=\operatorname{arctg}\frac{7}{8}+\pi n,\ n\in Z$

Пример 4. Решить уравнение $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Решение. Разделив обе части этого однородного уравнения второй степени на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0$. Далее положим $u=\operatorname{tg} x$, тогда приходим к квадратному уравнению $u^2+2u-3=0$, откуда $u_1=-3$, $u_2=1$.

Решив совокупность уравнений $\operatorname{tg} x=-3$, $\operatorname{tg} x=1$, получим $x=\operatorname{arctg}(-3)+\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x=5$.

Решение. Имеем:

$$5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x=5(\sin^2 x+\cos^2 x);$$

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0. \qquad (1)$$

В полученном уравнении отсутствует член вида $a\sin^2 x$, т. е. $a=0$. Здесь делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x, при которых $\cos^2 x=0$, удовлетворяют уравнению (1), а потому деление на $\cos^2 x$ приведет к потере корней. Поступим иначе: разложив левую часть уравнения (1) на множители, получим $\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$.

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\cos x=0;\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=0. \qquad (2)$$

Из первого уравнения совокупности (2) находим $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Разделив обе части однородного уравнения первой степени $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$ на $\cos x$, имеем $\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1=0$, откуда $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n$, т. е. $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Итак, получаем две серии решений: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$.

156*. Универсальная подстановка (для тригонометрических уравнений). Если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

В самом деле, имеем:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x,$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x.$$

Итак, $\sin x$ и $\cos x$ рационально выражаются через $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, поэтому подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ называется *универсальной*. Она может быть использована в уравнении вида $R(\sin x; \cos x) = 0$, где $R(\sin x; \cos x)$ — рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, то нужно проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Решение. Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ по формулам (1) и полагая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, придем к рациональному уравнению

$$3 \cdot \frac{2u}{1 + u^2} + 4 \cdot \frac{1 - u^2}{1 + u^2} = 5.$$

Решив это уравнение, получим $u = \frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ находим:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \text{ т. е. } x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, \; n \in Z.$$

Проверкой убеждаемся, что значения $x=\pi+2\pi n$ не удовлетворяют заданному уравнению. Итак, получаем ответ: $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $3\sin 2x+\cos 2x+1=0$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой. Выражая $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и полагая $\operatorname{tg} x=u$, получим рациональное уравнение

$$\frac{6u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}+1=0,$$

откуда $u=-\frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{3}$ находим $x=$ $=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k,\ k\in Z$.

Однако нужно еще проверить, не удовлетворяют ли заданному уравнению те значения x, при которых $2x=\pi+2\pi n$, т. е. значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Имеем:

$$3\sin(\pi+2\pi n)+\cos(\pi+2\pi n)+1=$$
$$=3\sin\pi+\cos\pi+1=3\cdot 0-1+1=0.$$

Проверка показывает, что значения $\frac{\pi}{2}+\pi n$ являются решениями уравнения. Итак, заданное уравнение имеет следующие решения:

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k\in Z,\ n\in Z.$$

157*. Метод введения вспомогательного аргумента (для тригонометрических уравнений). Иногда при решении тригонометрических уравнений оказывается полезным заменить выражение $a\cos x+b\sin x$ на $A\sin(x+\varphi)$, где $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. п. 132). В этом случае φ называют *вспомогательным аргументом*.

Пример 1. Решить уравнение $8\cos x+15\sin x=17$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{8^2+15^2}=$ $=17$, получим:

$$\frac{3}{17}\cos x+\frac{15}{17}\sin x=1.$$

Так как $\left(\frac{3}{17}\right)^2+\left(\frac{15}{17}\right)^2=1$, то существует такое φ, что $\frac{3}{17}=$ $=\sin\varphi$ и $\frac{15}{17}=\cos\varphi$. Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\sin\varphi\cos x+\sin x\cos\varphi=1.$$

Но $\sin\varphi\cos x+\sin x\cos\varphi=\sin(x+\varphi)$. Значит, $\sin(x+\varphi)=1$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\varphi$. Так как $\varphi=\arcsin\frac{8}{17}$, то окончательно получаем следующие решения заданного уравнения: $x=\frac{\pi}{2}-$ $-\arcsin\frac{8}{17}+2\pi n$, $n\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $5\sin x-12\cos x+$ $+13\sin 3x=0$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{5^2+12^2}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}\sin x-\frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}\cos x\right)=-13\sin 3x,$$

$$\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x=-\sin 3x.$$

Полагая $\frac{5}{13}=\cos\varphi$, $\frac{12}{13}=\sin\varphi$, получим:

$$\sin x\cos\varphi-\cos x\sin\varphi=-\sin 3x.$$

и далее

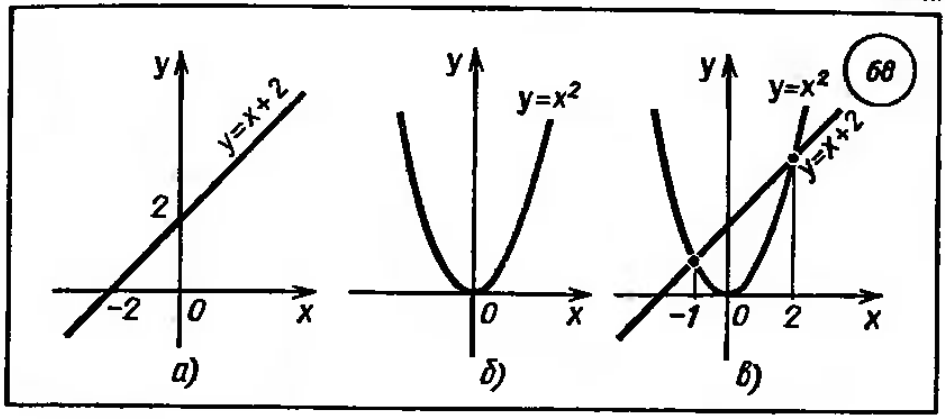
$$\sin(x-\varphi)+\sin 3x=0;\ 2\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=0.$$

Решая совокупность уравнений $\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)=0$, $\cos\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=$ $=0$, получим $x=\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\pi k$. Учитывая, что $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$, в итоге получаем следующие решения заданного уравнения:

$$x=\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}+\pi k,\ n\in Z,\ k\in Z.$$

158. Графическое решение уравнений. На практике довольно часто оказывается полезным *графический метод* решения уравнений. Он заключается в следующем: для решения уравнения $f(x)=0$ строят график функции $y=f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью x; эти абсциссы и являются корнями уравнения. Так, для решения уравнения $ax^2+bx+c=0$ достаточно построить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ и найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью x.

Например, график функции $y=-x^2+6x-5$ (рис. 59, *в*) пересекает ось x в точках (1; 0) и (5; 0), значит, уравнение $-x^2+6x-5=0$ имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=5$. График



функции $y=x^2-4x+5$ (рис. 59) не пересекает ось абсцисс, значит, уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет действительных корней.

Часто уравнение $f(x)=0$ заменяют равносильным $g(x)=h(x)$, затем строят графики функций $y=g(x)$ и $y=h(x)$ (если это проще, чем построение графика функции $y=f(x)$) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Так, для решения уравнения $x^3-3x+1=0$ можно преобразовать уравнение к виду $x^3=3x-1$, затем построить графики функций $y=x^3$ и $y=3x-1$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 1. Решить графически уравнение $x^2-x-2=0$.

Решение. Уравнение целесообразно переписать в виде

$$x^2=x+2.$$

Теперь решение уравнения может быть сведено к нахождению абсцисс точек пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=x+2$ (рис. 68, *а*, *б*).

На рисунке 68, *в* построены в одной системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=x+2$. Определяем абсциссы точек A и B пересечения этих графиков: $x_A=-1$, $x_B=2$. Таким образом, заданное уравнение имеет два корня: -1; 2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x}=|x-2|$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=|x-2|$. График функции $y=\sqrt{x}$ изображен на рисунке 69, *а*. Чтобы построить график функции $y=|x-2|$, рассмотрим два случая: если $x\geqslant 2$, то $x-2\geqslant 0$, и потому $|x-2|=x-2$; если же $x<2$, то $x-2<0$, и потому $|x-2|=2-x$. Таким образом, запись $y=|x-2|$ эквивалентна записи

$$y=\begin{cases} x-2, \text{ если } x\geqslant 2, \\ 2-x, \text{ если } x<2. \end{cases}$$

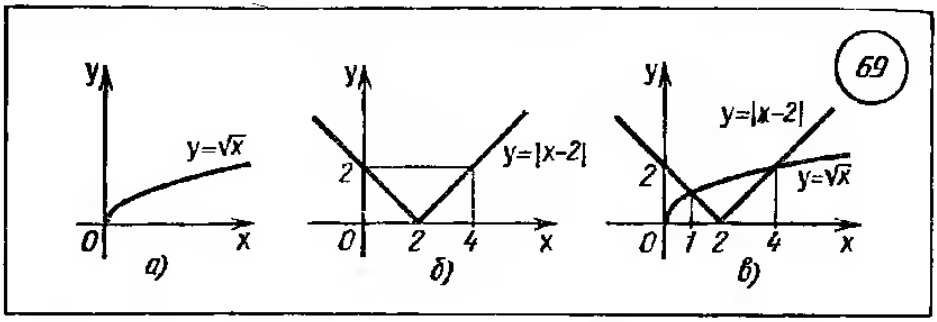


График этой функции изображен на рисунке 69, *б*. На рисунке 69, *в* оба графика изображены в одной системе координат. Они пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1=1$, $x_2=4$. Это два корня данного уравнения.

С графическим методом решения уравнения $f(x)=g(x)$ связан *функциональный метод* решения уравнения, основанный на том, что если одна из функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ либо не имеет корней (рис. 70, *а*), либо имеет единственный корень (рис. 70, *б*).

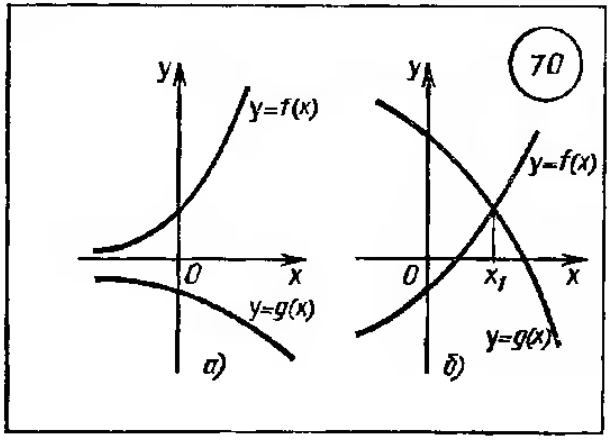
Пример 3. Решить уравнение $2^x=6-x$.

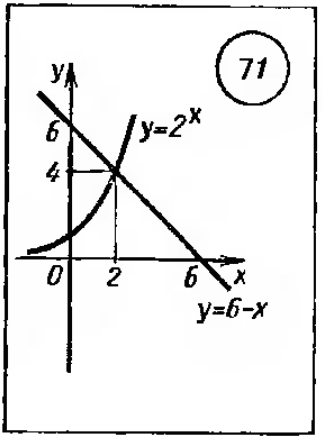
Решение. Легко заметить, что $x=2$ — корень уравнения. Так как функция $y=2^x$ возрастает, а функция $y=6-x$ убывает, то других корней это уравнение не имеет (рис. 71).

159*. Уравнения с параметром. Пусть дано равенство с переменными x, a:

$$f(x;\ a)=0.$$

Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение





$f(x; a)=0$ называется уравнением с переменной x и *параметром* a.

Решить уравнение с параметром a — это значит для каждого значения a найти значения x, удовлетворяющие этому уравнению.

Пример 1. Решить уравнение

$$2a(a-2)x=a-2.$$

Решение. Рассмотрим прежде всего те значения параметра, которые обращают в нуль коэффициент при x (при этих значениях параметра невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x, а при остальных значениях параметра такое деление возможно). Такими значениями являются $a=0$, $a=2$. При $a=0$ уравнение принимает вид $0\cdot x=-2$. Это уравнение не имеет корней. При $a=2$ данное уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, корнем его служит любое действительное число. При $a\neq 0$ и $a\neq 2$ уравнение можно преобразовать к виду $x=\frac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда находим $x=\frac{1}{2a}$.

Таким образом, если $a=0$, то уравнение не имеет корней; если $a=2$, то корнем служит любое действительное число; если $a\neq 0$ и $a\neq 2$, то $x=\frac{1}{2a}$.

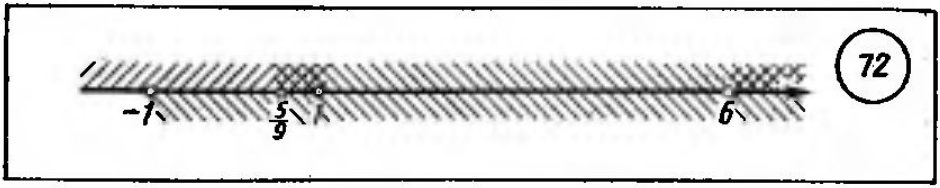
Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0.$$

Решение. Выделим особо значение параметра $a=1$. Дело в том, что при $a=1$ данное уравнение не является квадратным, а при $a\neq 1$ оно квадратное. Значит, решать его в каждом из этих случаев надо по-своему. При $a=1$ уравнение принимает вид $6x+7=0$, откуда находим $x=-\frac{7}{6}$. В случае $a\neq 1$ для квадратного уравнения выделим те значения параметра, при которых дискриминант уравнения обращается в нуль. Имеем $\frac{D}{4}=5a+4$. Значит, $a=-\frac{5}{4}$ — значение параметра, на которое нам надо обратить внимание.

Если $a<-\frac{4}{5}$, то $D<0$, и, следовательно, уравнение не имеет действительных корней; если $a>-\frac{4}{5}$ и $a\neq 1$, то $D>0$ и мы получаем:

$$x=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1};$$



если $a=-\frac{4}{5}$, то $D=0$ и мы получаем $x=-\frac{2a+1}{a-1}$, т. е. $x=-\frac{1}{3}$.

Итак, если $a<-\frac{4}{5}$, то действительных корней нет; если $a=1$, то $x=-\frac{7}{6}$; если $a=-\frac{4}{5}$, то $x=-\frac{1}{3}$; если $a>-\frac{4}{5}$ и $a\neq 1$, то

$$x=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2+2(a+1)x+9a-5=0$$

имеет два различных отрицательных корня?

Решение. Так как уравнение должно иметь два различных действительных корня x_1 и x_2, его дискриминант должен быть положительным. Имеем:

$D=4(a+1)^2-4(9a-5)=4a^2-28a+24=4(a-1)(a-6)$.

Значит, должно выполняться неравенство $4(a-1)(a-6)>0$.

По теореме Виета имеем:

$$x_1+x_2=-2(a+1),$$
$$x_1x_2=9a-5.$$

Поскольку по условию $x_1<0$ и $x_2<0$, то $-2(a+1)<0$ и $9a-5>0$.

В итоге мы приходим к системе неравенств (см. п. 177):

$$\begin{cases} 4(a-1)(a-6)>0, \\ -2(a+1)<0, \\ 9a-5>0. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим (см. п. 180, 183): $a<1$; $a>6$; из второго: $a>-1$; из третьего: $a>\frac{5}{9}$. С помощью координатной прямой (рис. 72) находим, что либо $\frac{5}{9}<a<1$, либо $a>6$.

§ 15. Уравнения с двумя переменными

160. Решение уравнения с двумя переменными. Рассмотрим *уравнение с двумя переменными* $f(x; y)=0$.

Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется *решением уравнения*. Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе — значение y.

Так, пары (10; 0), (16; 2), $(-2; -4)$ являются решениями уравнения $x-3y=10$. В то же время пара (1; 5) решением уравнения не является.

Это уравнение имеет и другие решения. Для их отыскания удобно выразить одну переменную через другую, например x через y, получив уравнение $x=10+3y$. Выбрав произвольное значение y, вычислим соответствующее значение x. Например, если $y=7$, то $x=10+3\cdot 7=31$, значит, пара (31; 7) является решением уравнения; если $y=-2$, то $x=10+3(-2)=4$, значит, пара (4; -2) также является решением заданного уравнения и т. д.

Уравнения с двумя переменными называются *равносильными*, если они имеют одни и те же решения.

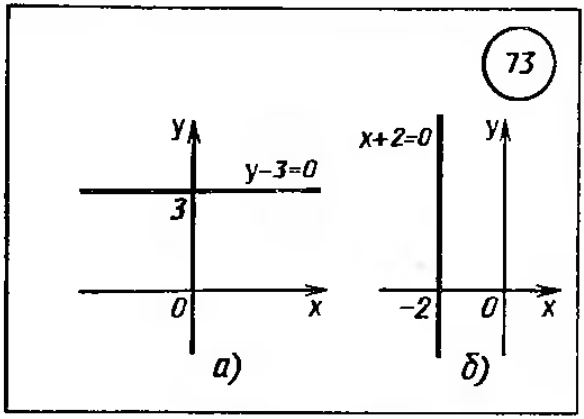
Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы 5.1 и 5.2 (см. п. 135) о равносильных преобразованиях уравнения.

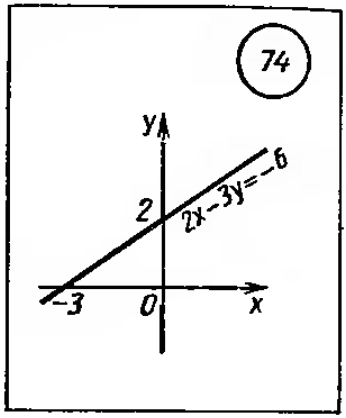
161. График уравнения с двумя переменными. Пусть дано уравнение с двумя переменными $f(x; y)=0$. Если все его решения изобразить точками на координатной плоскости, то получится некоторое множество точек плоскости. Это множество называется *графиком уравнения* $f(x; y)=0$.

Например, графиком уравнения $y-x^2=0$ является парабола $y=x^2$ (рис. 9); графиком уравнения $y-x=0$ является прямая (биссектриса первого и третьего координатных углов, рис. 8); графиком уравнения $y-3=0$ является прямая, параллельная оси x (рис. 73, *а*), а графиком уравнения $x+2=0$ — прямая, параллельная оси y (рис. 73, *б*). Графиком уравнения $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=0$ является одна точка (1; 2), так как координаты только этой точки удовлетворяют уравнению.

162. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Уравнение вида $ax+by=c$, где x, y — переменные, а a, b, c — числа, называется *линейным*; числа a и b называются *коэффициентами при переменных*, c — *свободным членом*.

Графиком любого линейного уравнения $ax+by=c$, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отли-





чен от нуля, является прямая; если $b=0$, то эта прямая параллельна оси y, если $a=0$, то эта прямая параллельна оси x.

Пример. Построить график уравнения $2x-3y=-6$.

Решение. Графиком этого линейного уравнения является прямая. Для построения прямой достаточно знать две ее точки. Подставив в уравнение $2x-3y=-6$ вместо x значение 0, получим $-3y=-6$, откуда $y=2$. Подставив в уравнение $2x-3y=-6$ вместо y значение 0, получим $2x=-6$, откуда $x=-3$.

Итак, мы нашли две точки графика: (0; 2) и (−3; 0). Проведя через них прямую, получим график уравнения $2x-3y=-6$ (рис. 74).

Если линейное уравнение имеет вид $0\cdot x+0\cdot y=c$, то могут представиться два случая:

1) $c=0$; в этом случае уравнению удовлетворяет любая пара $(x; y)$, а потому графиком уравнения является вся координатная плоскость;

2) $c\neq 0$; в этом случае уравнение не имеет решения, значит, его график не содержит ни одной точки.

§ 16. Системы уравнений

163. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы. Пусть даны два уравнения с двумя переменными $f(x; y)=0$ и $g(x; y)=0$.

Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо решить *систему уравнений*. Каждая пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое уравнение системы, называется *решением системы* уравнений. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Уравнения, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

означает, что уравнения $x-3y=10$ и $3x-2y=2$ образуют систему.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если эти системы имеют одни и те же решения. Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными. При решении системы уравнений обычно заменяют данную систему другой, более простой или по каким-либо причинам более «удобной», но равносильной первоначальной. Возможность такой замены обусловлена следующими двумя теоремами.

Т.5.5. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

равносильны.

Следствие. *Если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то получится система, равносильная данной.*

Так, равносильными будут следующие системы:

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ x=\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Т.5.6. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x-3y)+(3x-2y)=10+2, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

равносильны: мы заменили уравнение $x-3y=10$ суммой двух уравнений заданной системы, а уравнение $3x-2y=2$ оставили неизменным.

164. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки. *Метод подстановки* заключается в следующем:

1) Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором y выражено через x (или x через y).

2) Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной.

3) Находят корни этого уравнения.

4) Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения x (или y).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $x=3y+10$. Подставим выражение $3y+10$ вместо x во второе уравнение системы. Получим $(3y+10)^2-24y=100$, откуда находим $y_1=0$, $y_2=-4$. Соответствующие значения x найдем из уравнения $x=3y+10$. Если $y=0$, то $x=10$; если $y=-4$, то $x=-2$. Итак, система имеет два решения: $(-2;\ -4)$ и $(10;\ 0)$.

165. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения. *Метод сложения* основан на теоремах 5.5 и 5.6 (п. 163). Суть его поясним на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-y=16. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Умножив обе части второго уравнения системы на 3, получим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 9x-3y=48, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную данной по теореме 5.5.

Сложим теперь оба уравнения полученной системы. По теореме 5.6 система

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ (2x+3y)+(9x-3y)=7+48 \end{cases} \qquad (3)$$

равносильна системе (2). Система (3), в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 11x=55. \end{cases}$$

Из уравнения $11x=55$ находим $x=5$. Подставив это значение в уравнение $2x+3y=7$, находим $y=-1$.

Итак, $(5; -1)$ — решение системы (3), а значит, и решение равносильной ей системы (1).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ 2x^2+2y^2+x-3y-5=0. \end{cases}$$

Решение. Если обе части первого уравнения системы умножить на 2 и вычесть полученное уравнение из второго уравнения системы, то взаимно уничтожатся члены, содержащие переменные во второй степени:

$$(2x^2+2y^2+x-3y-5)-(2x^2+2y^2-4x+2y)=0,$$
$$5x-5y-5=0,$$
$$x-y-1=0.$$

Мы приходим к более простой системе

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ x-y-1=0, \end{cases}$$

которую нетрудно решить методом подстановки. Имеем $y=x-1$, значит,

$$x^2+(x-1)^2-2x+(x-1)=0,$$
$$2x^2-3x=0,$$
$$x_1=0,\ x_2=1{,}5.$$

Если $x=0$, то $y=x-1=0-1=-1$; если $x=1{,}5$, то $y=x-1=1{,}5-1=0{,}5$.

Ответ: $(0; -1)$ и $(1{,}5; 0{,}5)$.

166. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных. *Метод введения новых переменных* применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов: 1) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы; 2) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

Решение. Положим $\frac{x}{y}=z$, тогда $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ и первое уравнение системы примет вид $z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}$. Решим полученное уравнение относительно новой переменной z:

$6z^2-13z+6=0$, откуда

$$z_1=\frac{2}{3},\quad z_2=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, либо $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, т. е. $y=\frac{3x}{2}$, либо $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, т. е. $y=\frac{2x}{3}$.

Итак, первое уравненне заданной системы распалось на два уравнения: $y=\frac{3x}{2}$ и $y=\frac{2x}{3}$. В соответствии с этим нам предстоит теперь решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} y=\frac{3x}{2}, \\ x+y=5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\frac{2x}{3}, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x=2$, $y=3$, из второй $x=3$, $y=2$.

Ответ: (2; 3) и (3; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ xy+2(x+y)=26. \end{cases}$$

Решение. Положим $x+y=u$, $xy=v$. Тогда $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$ и система примет вид

$$\begin{cases} u^2-2v+u=32, \\ v+2u=26. \end{cases} \qquad (1)$$

Полученную систему можно решить методом подстановки. Выразив из второго уравнения v через u, получим $v=26-2u$ и, подставив результат в первое уравнение, получим $u^2-2(26-2u)+u=32$,

$$u^2+5u-84=0,$$
$$u_1=-12,\ u_2=7.$$

Соответственно находим $v_1=50$, $v_2=12$.

Итак, нашли два решения системы (1):

$$\begin{cases} u_1=-12, \\ v_1=50 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_2=7, \\ v_2=12. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x+y=-12, \\ xy=50 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12, \end{cases}$$

каждую из которых нетрудно решить методом подстановки

(выразив, например, y через x из первого уравнения). Первая система не имеет действительных решений, а вторая имеет два решения: (3; 4) и (4; 3). Они и будут решениями исходной системы.

167. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными. Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Пример 1. Решить графически систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8. \end{cases}$$

Решение. Построим график уравнения $3x+2y=5$ по двум точкам, например (1; 1) и (3; -2) (рис. 75).

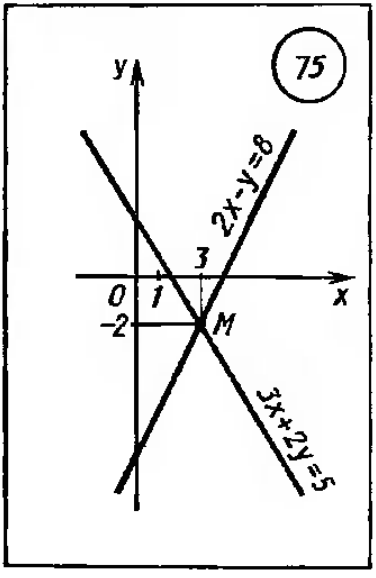
Построим график уравнения $2x-y=8$ по точкам (0; -8) и (4; 0) (рис. 75).

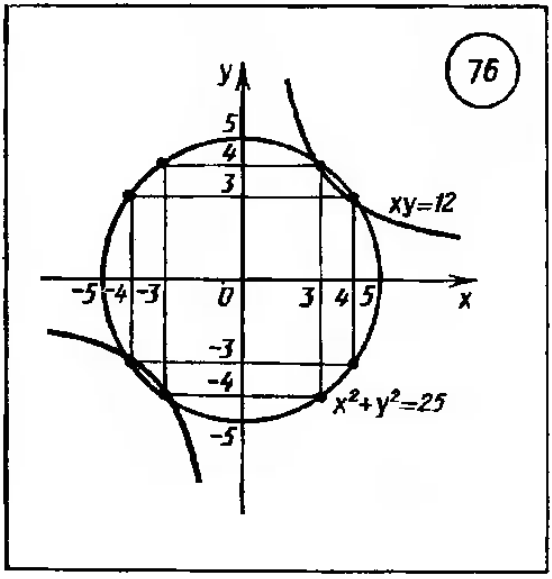
Полученные прямые не параллельны, их пересечением служит точка $M(3; -2)$. Значит, (3; -2) — решение заданной системы.

Пример 2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

Решение. Графиком уравнения $x^2+y^2=25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, рав-





ным 5. Графиком уравнения $xy=12$ является гипербола $y=\frac{12}{x}$ (см. п. 82). Построив графики в одной системе координат (рис. 76), найдем координаты точек A, B, C, D пересечения окружности и гиперболы: $A(4; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-4; -3)$, $D(-3; -4)$. Значит, решения заданной системы таковы:

$$(4; 3),\ (3; 4),\ (-4; -3),\ (-3; -4).$$

168. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Пусть даны два линейных уравнения с двумя переменными и все коэффициенты при переменных отличны от нуля:

$$a_1x+b_1y=c_1 \text{ и } a_2x+b_2y=c_2.$$

Графиком каждого из этих линейных уравнений является прямая (см. п. 162). Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то эти прямые пересекаются в одной точке; если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают; если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны и не совпадают.

Отсюда следует, что *система двух линейных уравнений с двумя переменными*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$,

имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,

не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

Например, система

$$\begin{cases} 5x+2y-3=0, \\ 3x+4y-7=0 \end{cases}$$

имеет одно решение, так как $\frac{5}{3}\neq\frac{2}{4}$. Система

$$\begin{cases} 2x-4y+1=0, \\ 4x-8y+3=0 \end{cases}$$

не имеет решений, поскольку $\frac{2}{4}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{1}{3}$. Система

$$\begin{cases} 3x-y-4=0, \\ -9x+3y+12=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, поскольку

$$\frac{3}{-9}=\frac{-1}{3}=\frac{-4}{12}.$$

169*. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методами умножения и деления. Методы умножения и деления при решении систем уравнений основаны на следующем утверждении:

Т.5.7. Если обе части уравнения $f_2(x; y)=g_2(x; y)$ ни при каких значениях $(x; y)$ одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases} f_1(x; y)=g_1(x; y), \\ f_2(x; y)=g_2(x; y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x; y)=g_1(x; y), \\ f_1(x; y)\,f_2(x; y)=g_1(x; y)\,g_2(x; y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x; y)=g_1(x; y), \\ \dfrac{f_1(x; y)}{f_2(x; y)}=\dfrac{g_1(x; y)}{g_2(x; y)} \end{cases}$$

равносильны.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение. Левая его часть обращается в 0 при $y=0$. Если $y=0$, то правая часть обращается в 0 при $x=0$. Но при $x=0$ левая часть не имеет смысла. Значит, нет таких пар $(x; y)$, при которых обе части первого уравнения системы обращаются в 0. Поэтому можно заменить первое уравнение произведением обоих уравнений системы, оставив второе уравнение системы без изменений.
Получим:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})\,(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}), \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Преобразовав первое уравнение этой системы, получим $8=(x+y)-(x-y)$, т. е. $y=4$. Подставив найденное значение y во второе уравнение системы, получим:

$$\sqrt{\frac{4x}{5}}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}. \qquad (1)$$

Решим это иррациональное уравнение (см. п. 150). Имеем последовательно:

$$\left(\sqrt{\frac{4x}{5}}\right)^2=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})^2,$$

$$\frac{4x}{5}=x+4-2\sqrt{x^2-16}+x-4,$$

$$5\sqrt{x^2-16}=3x,$$

$$25x^2-400=9x^2,$$

$$x^2=25,\ x_1=5,\ x_2=-5.$$

Второе значение не удовлетворяет уравнению (1), т. е. является посторонним корнем. Значит, система имеет одно решение (5; 4).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\(x+y)xy=120.\end{cases}$$

Решение. Ни при каких значениях $(x; y)$ обе части второго уравнения системы не обращаются в 0 одновременно. Значит, можно применить метод деления, перейдя от заданной системы к системе

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\\frac{(x-y)xy}{(x+y)xy}=\frac{30}{120}.\end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим, что

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{4},\ 4x-4y=x+y,\ 3x=5y,\ y=\frac{3x}{5}.$$

Подставим найденное выражение y через x в первое уравнение системы. Получим $(x-\frac{3}{5}x)\cdot x\cdot\frac{3}{5}x=30$ и далее $\frac{6}{25}x^3=30$, $x^3=125$, $x=5$. Из уравнения $y=\frac{3}{5}x$ находим, что если $x=5$, то $y=3$. Итак, (5; 3) — решение системы.

170. Системы показательных и логарифмических уравнений. Решение систем показательных и логарнфмических уравнений не содержит каких-либо принципиально новых моментов. Используются обычные приемы решения логарифмических и показательных уравнений (см. п. 151, 152) и обычные приемы решения систем уравнений (см. п. 164—166, 169).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ 3^{x^2} = 9 \cdot 3^{15y+2}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Воспользуемся тем, что $\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2$ (см. п. 121). Тогда уравнение можно записать в виде $\log_4 x^2 + \log_4 y = 4$ и далее $\log_4 x^2 y = 4$ (см. п. 120), откуда $x^2 y = 4^4$, т. е. $x^2 y = 256$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы. Имеем:

$$3^{x^2} = 3^2 \cdot 3^{15y+2}, \quad x^2 = 15y + 4.$$

Задача свелась к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 y = 256, \\ x^2 = 15y + 4. \end{cases}$$

Подставим $15y + 4$ вместо x^2 в первое уравнение:

$$(15y + 4)\, y = 256, \quad 15y^2 + 4y - 256 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -\frac{64}{15}.$$

Если $y = 4$, то $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot 4 + 4 = 64$, т. е. $x^2 = 64$, откуда находим $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. Если $y = -\frac{64}{15}$, то $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot \left(-\frac{64}{15}\right) + 4 = -60$, т. е. $x^2 = -60$ — это уравнение не имеет действительных корней.

Итак, мы нашли две пары значений переменных:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Так как заданная система содержит выражения $\log_2 x$, $\log_4 y$, то должны выполняться условия $x > 0$, $y > 0$. Поэтому пара $\begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 4 \end{cases}$ исходной системе не удовлетворяет.

Ответ: (8; 4).

171*. Системы тригонометрических уравнений с двумя переменными. При решении систем тригонометрических уравнений используются обычные приемы решения систем уравнений и формулы тригонометрии.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=1{,}5, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=1{,}25. \end{cases}$$

Решение. Положим $\sin x=u$, $\cos y=v$. Тогда получим систему $\begin{cases} u+v=1{,}5, \\ u^2+v^2=1{,}25. \end{cases}$ Из первого уравнения этой системы $v=\frac{3}{2}-u$. Подставив найденное выражение вместо v во второе уравнение системы, получим:

$$u^2+\left(\frac{3}{2}-u\right)^2=\frac{5}{4},$$

$$2u^2-3u+1=0,$$

$$u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2}.$$

Если $u=1$, то $v=\frac{3}{2}-u=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. Если $u=\frac{1}{2}$, то $v=\frac{3}{2}-u=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$.

Итак, мы получили две пары решений: $\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=\frac{1}{2}, \\ v_2=1. \end{cases}$ Так как $u=\sin x$, $v=\cos y$, то нам остается решить две системы уравнений: $\begin{cases} \sin x=1, \\ \cos y=\frac{1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \cos y=1. \end{cases}$

Из уравнения $\sin x=1$ находим $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Из уравнения $\cos y=\frac{1}{2}$ находим $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Значит, решения системы $\begin{cases} \sin x=1, \\ \cos y=\frac{1}{2} \end{cases}$ имеют вид $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z, \\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z. \end{cases}$

Из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ находим $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Из уравнения $\cos y=1$ находим $y=2\pi n$, $n\in Z$. Значит, решения системы $\begin{cases} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \cos y=1 \end{cases}$

имеют вид $\begin{cases} x=(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k, \ k\in Z, \\ y=2\pi n, \ n\in Z. \end{cases}$

Замечание. При решении систем тригонометрических уравнений существенно использование различных обозначений для параметра (n, k, m, ...) в записи решений первого и второго уравнений системы. Иными словами, если в первом уравнении системы при записи решения в качестве параметра использована буква k, то для второго уравнения эту букву уже использовать нельзя — в рассмотренном примере для этой цели использовалась буква n.

172. Системы трех уравнений с тремя переменными. Рассмотрим *систему трех уравнений с тремя переменными*

$$\begin{cases} f(x; y; z)=0, \\ g(x; y; z)=0, \\ h(x; y; z)=0. \end{cases}$$

Решением такой системы называется всякая тройка чисел, удовлетворяющая каждому уравнению системы.

Для систем трех уравнений с тремя переменными применяются методы решения, аналогичные тем, что используются для систем двух уравнений с двумя переменными.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$$

Решение. Применим метод подстановки. Выразим из первого уравнения x через y и z и подставим результат во второе и третье уравнения системы. Имеем:

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ 2(2-y-z)+3y+z=1, \\ (2-y-z)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$$

и далее

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ y-z=-3, \\ y^2+z^2+yz-3z=0. \end{cases}$$

Последние два уравнения полученной системы в свою очередь образуют систему двух уравнений с двумя переменными. Решим эту систему методом подстановки. Имеем:

$$\begin{cases} y=z-3, \\ (z-3)^2+z^2+z(z-3)-3z=0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} y=z-3, \\ z^2-4z+3=0. \end{cases}$$

Из уравнения $z^2-4z+3=0$ находим $z_1=1$, $z_2=3$. Из уравнения $y=z-3$ получаем соответственно $y_1=-2$, $y_2=0$, а из уравнения $x=2-y-z$ находим $x_1=3$, $x_2=-1$.

Итак, получили следующие решения: $(3;\ -2;\ 1)$ и $(-1;\ 0;\ 3)$.

173. Решение задач с помощью составления систем уравнений.

З а д а ч а 1. Два пешехода идут навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго. Если же второй пешеход выйдет на 2 ч раньше первого, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Р е ш е н и е. Пусть x километров в час — скорость первого пешехода, а y кнлометров в час — скорость второго пешехода. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то согласно условию он будет идти до встречи 4,5 ч, тогда как второй — 2,5 ч. За 4,5 ч первый пройдет путь $4{,}5x$ километров, а за 2,5 ч второй пройдет путь $2{,}5y$ километров. Их встреча означает, что суммарно они прошли путь 30 км, т. е. $4{,}5x+2{,}5y=30$ — первое уравнение.

Если второй выйдет на 2 ч раньше первого, то согласно условию он будет идти до встречи 5 ч, тогда как первый — 3 ч. Рассуждая, как и выше, придем ко второму уравнению: $3x+5y=30$.

В итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4{,}5x+2{,}5y=30, \\ 3x+5y=30. \end{cases}$$

откуда получим $x=5$, $y=3$.

О т в е т: первый пешеход идет со скоростью 5 км/ч, а второй — 3 км/ч.

З а д а ч а 2. Вкладчику на его сбережения через год сберкасса начислила 6 р. процентных денег. Добавив 44 р., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил 257,5 р. Какая сумма была положена на сберкнижку первоначально и сколько процентов начисляет сберкасса?

Р е ш е н и е. Пусть x рублей — первоначальный вклад, а сберкасса в год начисляет $y\%$. Тогда к концу года к перво-

начальному вкладу добавится $\frac{y}{100} \cdot x$ рублей. Из условия получаем уравнение $\frac{yx}{100}=6$.

В конце года вкладчик внес в сберкассу еще 44 р., так что вклад в начале второго года составил $x+6+44$, т. е. $(x+50)$ рублей. Сумма, которая получилась к концу второго года с учетом начисления, составляет $(x+50+\frac{y}{100}(x+50))$ рублей, и по условию она равна 257,5 р. Это позволяет составить второе уравнение:

$$x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257{,}5.$$

Итак, мы пришли к следующей системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \frac{yx}{100}=6, \\ x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257{,}5. \end{cases}$$

Выполнив преобразоваиия обоих уравнений, получим:

$$\begin{cases} xy=600, \\ 100x+50y+xy=20\,750. \end{cases}$$

Заменив второе уравнение системы разностью второго и первого уравнений, получим:

$$\begin{cases} xy=600, \\ 100x+50y=20\,150. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Из второго уравнения находим $y=403-2x$. Подставив выражение $403-2x$ вместо y в первое уравнение системы, получим $x(403-2x)=600$, откуда находнм два кория: 200 и 1,5. Ясно, что только первое значение удовлетворяет смыслу задачи.

Подставив в уравненне $y=403-2x$ вместо x найдеиное значение 200, получим $y=3$. Итак, первоначальный вклад составлял 200 р., а сберкасса в год иачисляет 3%.

Глава VI. НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Решение неравенств с переменной

174. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной. Пусть дано неравенство $f(x)>g(x)$. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство, называется *решением неравенства. Решить неравенство с переменной* — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства с одной переменной называются *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

При решении неравенств обычно заменяют данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному; полученное неравенство снова заменяют более простым, равносильным данному неравенством и т. д. Такие замены осуществляются на основе следующих утверждений.

Т.6.1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

Т.6.2. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

Т.6.3. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например, неравенства $x^2+5x<6$ и $x^2+5x-6<0$ равносильны по теореме 6.1. Неравенства $3x^2+6x<9$ и $x^2+2x<3$ равносильны по теореме 6.2 (обе части неравенства $3x^2+6x<9$ мы разделили на положительное число 3, оставив без изменения знак $<$ исходного неравенства). Неравенства $-6x<12$ и $x>-2$ равносильны по теореме 6.3 (обе части неравенства $-6x<12$ мы разделили на отрицательное число -6, изменив при этом знак $<$ исходного неравенства на знак $>$).

На практике иногда полезны теоремы, являющиеся обобщениями теорем 6.2 и 6.3.

Т.6.4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех

значениях переменной положительные значения, то получится неравенство, равносильное данному.

Т.6.5. Если обе части неравенства умножить нлн разделить на одно и то же выражение, принимающее прн всех значениях переменной отрнцательные значения, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, раэносильное данному.

175. Графическое решение неравенств с одной переменной. Для *графического* решения неравенства $f(x)>g(x)$ нужно построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ н выбрать те промежутки оси абсцисс, на которых график функции $y=f(x)$ расположен выше графика функции $y=g(x)$.

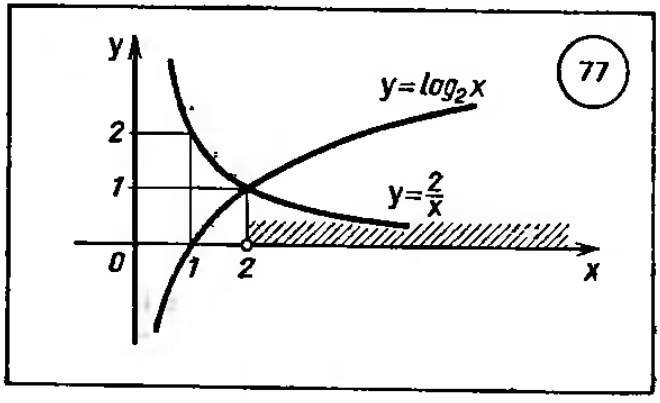
Пример. Решить графическн неравенство

$$\log_2 x=\frac{2}{x}.$$

Решение. Постронм в одной системе координат графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\frac{2}{x}$ (рис. 77). Из рисунка видно, что график функции $y=\log_2 x$ расположен выше графика функции $y=\frac{2}{x}$ при $x>2$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

176. Линейные иеравенства с одной переменной. *Линейным* называется неравенство вида $ax>b$ (нлн соответственно $ax<b$, $ax\geqslant b$, $ax\leqslant b$). Еслн $a>0$, то неравенство $ax>b$ равносильно неравенстэу $x>\frac{b}{a}$ (см. Т. 6.2), значнт, множество решений неравенства есть промежуток $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$. Если $a<0$, то нера-



венство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$ (см. Т.6.3), значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$. Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$, т. е. оно не имеет решений, если $b \geqslant 0$, и верно при любых x, если $b < 0$.

Многие неравенства в процессе преобразований сводятся к линейным.

Пример. Решить неравенство

$$2(x-3)+5(1-x) \geqslant 3(2x-5).$$

Решение. Раскрыв скобки, получим:

$$2x-6+5-5x \geqslant 6x-15,$$
$$-3x-1 \geqslant 6x-15.$$

Далее имеем

$$-3x-6x \geqslant -15+1,$$
$$-9x \geqslant -14. \qquad (1)$$

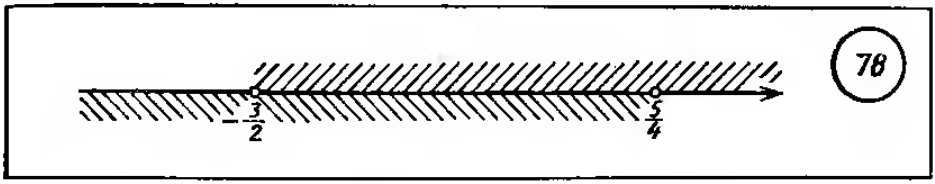
По теореме 6.1 это неравенство равносильно заданному неравенству. Разделим теперь обе части неравенства (1) на отрицательное число -9 и изменим знак неравенства. Получим согласно теореме 6.3 неравенство, равносильное неравенству (1): $x \leqslant \frac{14}{9}$. Значит, множество решений заданного неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{14}{9}\right]$.

177. Системы неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *систему*, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется *решением системы неравенств*.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Например, запись $\begin{cases} 2x-1>3, \\ 3x-2<11 \end{cases}$ означает, что неравенства $2x-1>3$ и $3x-2>11$ образуют систему.

Иногда используется запись в виде двойного неравенства. Например, систему неравенств $\begin{cases} 2x+1>1, \\ 2x+1<5 \end{cases}$ можно записать в виде двойного неравенства $1<2x+1<5$.



Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+2>3x-1, \\ 3x+1>7x-4. \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство системы преобразуется в равиосильное ему неравенство $x>-\frac{3}{2}$, а второе — в неравенство $x<\frac{5}{4}$. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} x>-\frac{3}{2}, \\ x<\frac{5}{4}. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рнс. 78) находим, что множество решений системы есть интервал $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{4}\right)$.

Пример 2. Решнть систему неравенств

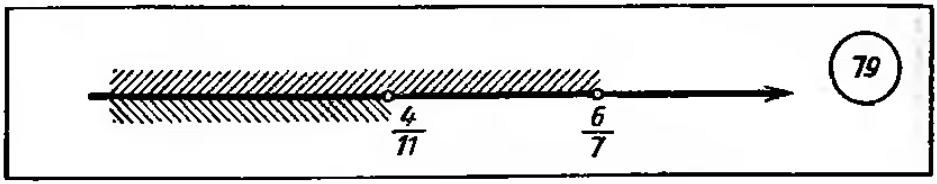
$$\begin{cases} 3(x+1)-\frac{x-2}{4}<5x-7\cdot\frac{x+3}{2}, \\ 2x-\frac{x}{3}+6\leqslant 4x-3. \end{cases}$$

Решение. Выполнив преобразования каждого из неравенств системы, получим:

$$\begin{cases} x<-\frac{56}{5}, \\ x\geqslant\frac{27}{7}. \end{cases}$$

Значений x, удовлетворяющих одновременно неравенствам $x<-\frac{56}{5}$ и $x\geqslant\frac{27}{7}$, иет, значит, заданная система неравенств не имеет решений.

178. Совокупность неравеиств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *совокупность*, если ставится задача найти все такие зиачения пере-



менной, каждое из которых является решеннем хотя бы одного из данных неравенств.

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называется *решением совокупности неравенств.*

Пример. Решить совокупность неравенств

$$\frac{2x-3}{5}>\frac{3x-2}{2}; \qquad \frac{x}{3}+1>\frac{3x}{2}.$$

Решение. Преобразовав каждое из неравенств, получим совокупность, равносильную заданной: $x<\frac{4}{11}$, $x<\frac{6}{7}$. С помощью числовой прямой находим, что решением заданной совокупности служит промежуток $(-\infty;\frac{6}{7})$ (рис. 79).

179. Дробно-линейные неравенства. Рассмотрим примеры решения неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{2x+1}{3x-2}>0$.

Решение. Дробь положительна, если числитель и знаменатель ее имеют одинаковые знаки, т. е. либо оба положительны, либо оба отрицательны. Значит, мы получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x+1>0, \\ 3x-2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x+1<0, \\ 3x-2<0. \end{cases}$$

Из первой находим $\begin{cases} x>-\frac{1}{2}, \\ x>\frac{2}{3}, \end{cases}$ т. е. $x>\frac{2}{3}$.

Из второй находим $\begin{cases} x<-\frac{1}{2}, \\ x<\frac{2}{3}, \end{cases}$ т. е. $x<-\frac{1}{2}$.

В итоге получили следующие решения заданного неравенства:

$$x<-\frac{1}{2};\quad x>\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Решить неравенство $\frac{3x+7}{2x-7}\geqslant 5$.

Решение. Имеем последовательно $\frac{3x+7}{2x-7}-5\geqslant 0$,

$$\frac{3x+7-10x+35}{2x-7}\geqslant 0,$$

$$\frac{-7x+42}{2x-7}\geqslant 0.$$

Умножим обе части неравенства на -1, изменив при этом знак неравенства (см. Т. 6.3, п. 174). Получим:

$$\frac{7x-42}{2x-7}\leqslant 0.$$

Дробь меньше или равна нулю в двух случаях: 1) если числитель меньше или равен нулю, а знаменатель больше нуля; 2) если числитель больше или равен нулю, а знаменатель меньше нуля. Значит, мы получаем две системы неравенств:

$$\begin{cases} 7x-42\leqslant 0, \\ 2x-7>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x-42\geqslant 0, \\ 2x-7<0. \end{cases}$$

Из первой находим $\begin{cases} x\leqslant 6, \\ x>\frac{7}{2}, \end{cases}$ т. е. $\frac{7}{2}<x\leqslant 6$.

Из второй находим $\begin{cases} x\geqslant 6, \\ x<\frac{7}{2}, \end{cases}$ т. е. система не имеет решений.

Значит, множество решений заданного неравенства есть промежуток $\left(\frac{7}{2};\ 6\right]$.

180. Неравенства второй степени. Здесь речь идет о неравенствах вида $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$, где $a\neq 0$.

Т.6.6. Если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена ax^2+bx+c отрицателен, а старший коэффициент a положителен, то при всех значениях x выполняется неравенство $ax^2+bx+c>0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \geqslant 0$. Для решения неравенства $ax^2+bx+c>0$ (или $ax^2+bx+c<0$) нужно разложить квадратный трехчлен ax^2+bx+c на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (см. п. 56), затем разделить обе части неравенства $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ (или $a(x-x_1)\times$ $\times(x-x_2)<0$) на число a, сохранив знак неравенства, если $a>0$, и изменив знак неравенства на противоположный, если $a<0$ (см. п. 174), т. е. перейти к неравенству $(x-x_1)(x-x_2)>0$ (или $(x-x_1)(x-x_2)<0$). Теперь остается воспользоваться тем, что произведение двух чисел положительно (отрицательно), если сомножители имеют одинаковые (разные) знаки.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2+5x+2>0$.

Решение. Найдем корни трехчлена $2x^2+5x+2$. Из уравнения $2x^2+5x+2=0$ получаем $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Значит, $2x^2+5x+2=2(x+2)(x+\frac{1}{2})$, и мы приходим к неравенству $2(x+2)(x+\frac{1}{2})>0$ и далее $(x+2)(x+\frac{1}{2})>0$. Выражения $x+2$ и $x+\frac{1}{2}$ должны иметь одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+\frac{1}{2}>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+2<0, \\ x+\frac{1}{2}<0. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $x>-\frac{1}{2}$, а из второй, что $x<-2$.

Пример 2. Решить неравенство $7x+10 \geqslant 3x^2$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $7x+10-$ $-3x^2 \geqslant 0$ и, умножив обе части последнего неравенства на -1, получим $3x^2-7x-10 \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $3x^2-7x-10$ таковы: $x_1=-1$, $x_2=\frac{10}{3}$. Разложим трехчлен на множители, в результате чего получим неравенство $3(x+1)\times$ $\times\left(x-\frac{10}{3}\right)\leqslant 0$ и далее $(x+1)\left(x-\frac{10}{3}\right)\leqslant 0$. От последнего неравенства переходим к совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x+1\leqslant 0, \\ x-\frac{10}{3}\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x-\frac{10}{3}\leqslant 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй находим, что

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}.$$

Пример 3. Решить неравенство $x^2-6x+9>0$.

Решение. Квадратный трехчлен x^2-6x+9 имеет два одинаковых корня: $x_1=x_2=3$. Значит, $x^2-6x+9=(x-3)^2$, и неравенство принимает вид $(x-3)^2>0$. Это неравенство выполняется при всех x, кроме $x=3$.

Пример 4. Решить неравенство $x^2\geqslant 25$.

Решение. Последовательно имеем $x^2-25\geqslant 0$, $(x-5)\times\times(x+5)\geqslant 0$, откуда

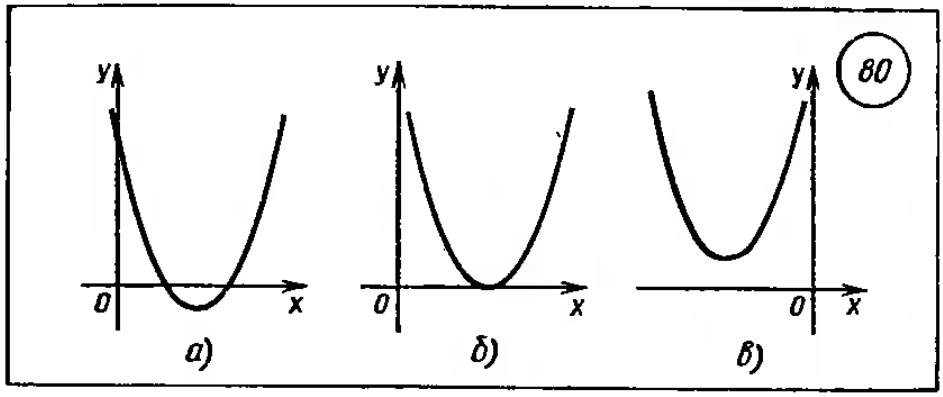
$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ x+5\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-5\leqslant 0, \\ x+5\leqslant 0. \end{cases}$$

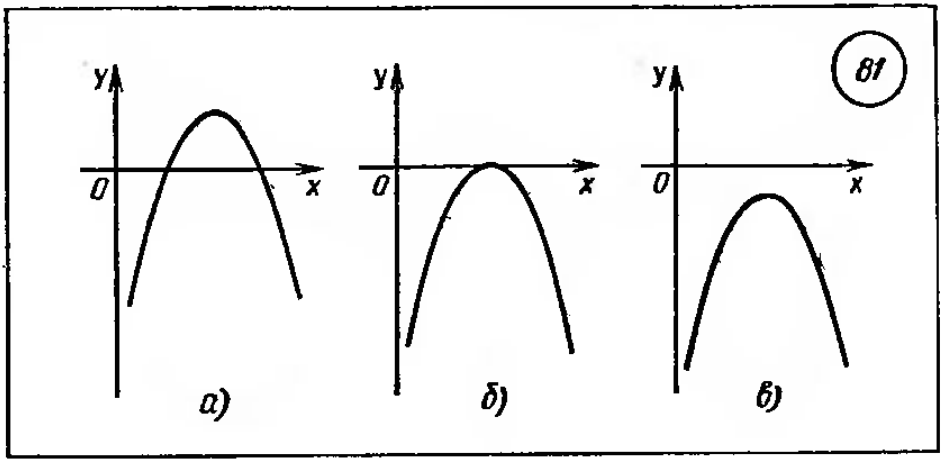
Из первой системы получаем $x\geqslant 5$, из второй $x\leqslant -5$.

181. Графическое решение неравенств второй степени. Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$. При этом возможны три случая: парабола пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня), парабола имеет вершину на оси x (т. е. уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один корень), парабола не пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней). Итого возможны шесть положений параболы, служащей графиком функции $y=ax^2+bx+c$ относительно оси x,— они представлены на рисунках 80—81. Опираясь на эти графические иллюстрации, можно решать квадратные неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2+5x+2>0$.

Решение. Уравнение $2x^2+5x+2=0$ имеет два корня: $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Парабола, служащая графиком функции $y=2x^2+5x+2$, имеет вид, изображенный на рисунке 80, *а*. Неравенство $2x^2+5x+2>0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x: это будет





при $x<x_1$ или при $x>x_2$, т. е. при $x<-2$ или при $x>-\frac{1}{2}$.

Значит, решения неравенства таковы: $x<-2$, $x>-\frac{1}{2}$ (см. пример 1 из п. 180).

Пример 2. Решить неравенство $3x^2-7x-10\leqslant 0$.

Решение. Уравнение $3x^2-7x-10=0$ имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=\frac{10}{3}$. Парабола, служащая графиком функции $y=3x^2-7x-10$, имеет вид, изображенный на рисунке 80, *а*. Неравенство $3x^2-7x-10\leqslant 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат на оси x или ниже ее: это будет при x из промежутка $[x_1; x_2]$. Значит, множество решений неравенства есть отрезок $\left[-1; \frac{10}{3}\right]$ (см. пример 2 из п. 180).

Пример 3. Решить неравенство $-x^2+4x-4>0$.

Решение. Уравнение $-x^2+4x-4=0$ имеет один корень $x=2$. Парабола, служащая графиком функции $y=-x^2+4x-4$, имеет вид, изображенный на рисунке 81, *б*. Неравенство $-x^2+4x-4>0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x. Таких точек нет, значит, неравенство не имеет решений.

Пример 4. Решить неравенство $-3x^2+x-5<0$.

Решение. Уравнение $-3x^2+x-5=0$ не имеет действительных корней. Парабола, служащая графиком функции $y=-3x^2+x-5$, имеет вид, изображенный на рисунке 81, *в*. Неравенство $-3x^2+x-5<0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси x. Поскольку вся парабола лежит ниже оси x, то неравенство выполняется при любых значениях x.

182. Неравенства с модулями. При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используется определение модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Иногда полезно воспользоваться геометрической интерпретацией модуля действительного числа, согласно которой $|a|$ означает расстояние точки a координатной прямой от начала отсчета O, а $|a-b|$ означает расстояние между точками a и b на координатной прямой (см. п. 27).

Кроме того, можно использовать метод возведения в квадрат обеих частей неравенства, основанный на следующей теореме.

Т.6.7. Если выражения $f(x)$ и $g(x)$ при любых x принимают только неотрицательные значения, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^2 > (g(x))^2$ равносильны.

Применяется эта теорема при решении неравенств с модулями так.

Пусть нужно решить неравенство

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

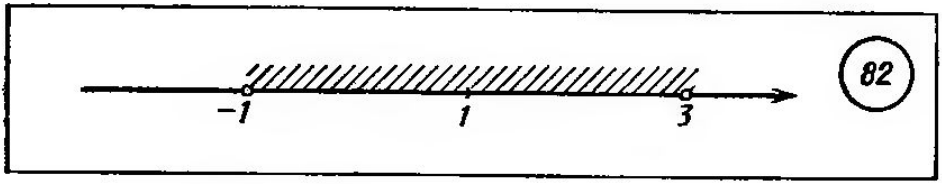
Так как при любых x из области определения выражений $f(x)$ и $g(x)$ справедливы соотношения $|f(x)| \geqslant 0$, $|g(x)| \geqslant 0$, $(|f(x)|)^2 = (f(x))^2$ и $(|g(x)|)^2 = (g(x))^2$, то данное неравенство равносильно неравенству $(f(x))^2 > (g(x))^2$.

Пример 1. Решить неравенство $|x-1| < 2$.

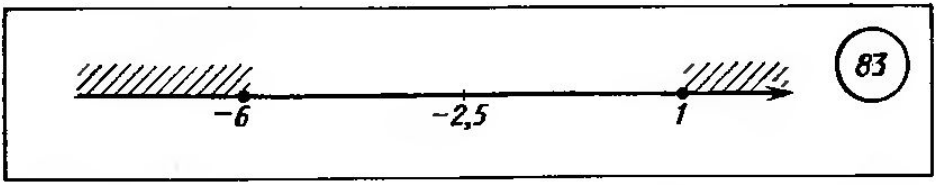
Решение.

Первый способ. $|x-1|$ можно рассматривать как расстояние на координатной прямой между точками x и 1. Значит, нам нужно указать на координатной прямой все точки x, которые удалены от точки 1 меньше чем на 2 единицы. С помощью координатной прямой (рис. 82) устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал $(-1; 3)$.

Второй способ. Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(x-1)^2 < 4$. Решая последнее неравенство, получим $x^2 - 2x - 3 < 0$, откуда находим, что $-1 < x < 3$ (см. п. 180 или п. 181).



82



83

Третий способ. По определению модуля числа

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ если } x-1\geqslant 0, \\ -(x-1), \text{ если } x-1<0, \end{cases}$$

поэтому данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-1<2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0, \\ -(x-1)<2. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $1\leqslant x<3$, из второй системы $-1<x<1$. Объединив эти решения, получим промежуток $(-1; 3)$.

Пример 2. Решить неравенство $|2x+5|\geqslant 7$.

Решение. Имеем $|x+2{,}5|\geqslant 3{,}5$. Нам нужно указать на координатной прямой все такие точки x, которые удалены от точки $-2{,}5$ на расстояние, большее или равное 3,5. С помощью координатной прямой (рис. 83) находим решения: $x\leqslant -6$; $x\geqslant 1$.

Пример 3. Решить неравенство $|2x-1|\leqslant |3x+1|$.

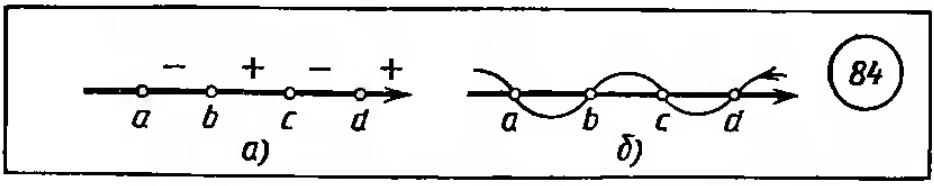
Решение. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим неравенство $(2x-1)^2\leqslant (3x+1)^2$, равносильное данному. Преобразовав последнее неравенство, получим $5x^2+10x\geqslant 0$, откуда находим: $x\leqslant -2$; $x\geqslant 0$.

Пример 4. Решить неравенство $|2x+4|\leqslant 3x+2$.

Решение. Если $2x+4\geqslant 0$, то $|2x+4|=2x+4$, и, следовательно, неравенство примет вид $2x+4\leqslant 3x+2$. Если же $2x+4<0$, то $|2x+4|=-(2x+4)$, и неравенство принимает вид $-(2x+4)\leqslant 3x+2$. Таким образом, данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} 2x+4\geqslant 0, \\ 2x+4\leqslant 3x+2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+4<0, \\ -(2x+4)\leqslant 3x+2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x\geqslant 2$, вторая система не имеет решений. Значит, множество решений неравенства — луч $[2; +\infty)$.



183. Решение рациональных иеравенств методом промежутков[1]. Решение рациональных неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)}>0$ (вместо знака $>$ может быть и любой другой знак неравенства), где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, основано на следующем рассуждении.

Рассмотрим функцию $h(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где $a<b<c<d$.

Если $x>d$, то каждый из сомножителей $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ положителен, и, следователььио, на промежутке $(d;\ +\infty)$ имеем $h(x)>0$. Если $c<x<d$, то $x-d<0$, а остальные сомножители по-прежнему положительны. Значит, на интервале $(c;\ d)$ имеем $h(x)<0$. Аиалогично на интервале $(b;\ c)$ будет $h(x)>0$ и т. д. (рнс. 84, *а*).

Изменение знаков функции $h(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волиообразиой кривой (ее называют «кривой знаков»), которую чертят справа налево, начиная сверху (рис. 84, *б*). Эту иллюстрацию нужно понимать так: на тех промежутках, где эта кривая проходит выше координатиой прямой, выполняется неравенство $h(x)>0$, на тех же промежутках, где кривая проходит ниже прямой, имеем $h(x)<0$.

Для проведенного выше рассуждеиия было несущественно количество линейиых множителей в числителе и знаменателе, а также взаимное расположение корией чнслителя н знаменателя дроби на координатной прямой. Поэтому оно применимо и для функции вида

$$f(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_k)}, \qquad (1)$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $f(x)$ мы также можем иллюстрировать с помощью кривой знаков, которую чертят справа налево, начиная сверху, и проводят через все отмеченные иа координатной прямой точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$. На этом основан *метод промежутков*, который с успехом применяется для решения рациоиальных неравенств.

[1] Этот метод иногда называют методом интервалоз.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)}<0.$$

Решение. Выполним преобразования левой части неравенства

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)}<0$$

и умножим обе части неравенства на 8; получим неравенство $\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}<0$, равносильное данному.

Изменение знаков функции $f(x)=\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}$ иллюстрируем с помощью кривой знаков (рис. 85, *а*). Значения x, при которых $f(x)<0$ (заштриховано), удовлетворяют следующим неравенствам:

$$x<-5;\ -\sqrt{2}<x<-\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}<x<\sqrt{3}.$$

Это решения исходного неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1$.

Решение. Имеем $\frac{x^2-x-6}{x^2-1}-1<0$

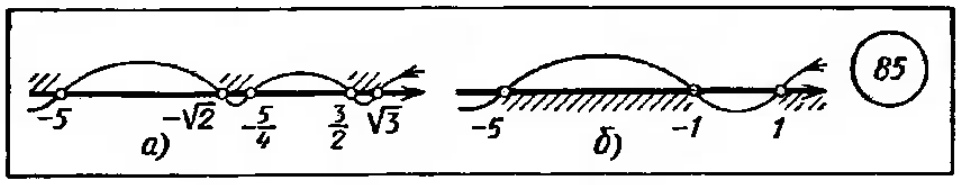
и далее $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0$.

Начертим кривую знаков для функции $f(x)=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (рис. 85, *б*). С ее помощью находим решения неравенства:

$$-5<x<-1;\ x>1.$$

Пример 3. Решить неравенство $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x}\leqslant 0$.

Решение. Выражение $(x-1)^4(x+2)^2$ обращается в нуль при $x=1$ и при $x=-2$, а при остальных значениях x оно положительно. Значения



$x=1$ и $x=-2$ удовлетворяют данному нестрогому неравенству, т. е. являются его решениями. Пусть теперь $x\neq 1$, $x\neq -2$, тогда $(x-1)^4(x+2)^2>0$, а потому, разделив обе части заданного неравенства на $(x-1)^4(x+2)^2$ и сохранив знак заданного неравенства, получим неравенство $\frac{x-1}{x}\leqslant 0$, равносильное исходному (см. п. 174). Полученное неравенство имеет следующие решения: $0<x\leqslant 1$. В ответ нужно включить и отмеченное выше решение $x=-2$.

184. Показательные неравенства. При решении неравенств вида $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует помнить, что показательная функция $y=a^x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$ (см. п. 94). Значит, в случае, когда $a>1$, от неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует переходить к неравенству того же смысла $f(x)>g(x)$. В случае же, когда $0<a<1$, от неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x)<g(x)$.

Пример 1. Решить неравенство $2^{3x+7}<2^{2x-1}$.

Решение. Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла: $3x+7<2x-1$. Решив это неравенство, получим $x<-8$.

Пример 2. Решить неравенство $(0{,}04)^{5x-x^2-8}\leqslant 625$.

Решение. Так как $625=25^2=\left(\frac{1}{25}\right)^{-2}=(0{,}04)^{-2}$, то заданное неравенство можно записать в виде

$$(0{,}04)^{5x-x^2-8}\leqslant(0{,}04)^{-2}.$$

Так как $0<0{,}04<1$, то, сравнивая показатели, запишем неравенство противоположного смысла $5x-x^2-8\geqslant -2$. Имеем последовательно

$$\begin{aligned}&5x-x^2-8+2\geqslant 0,\\&-x^2+5x-6\geqslant 0,\\&x^2-5x+6\leqslant 0,\\&(x-2)(x-3)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Решив последнее неравенство (см. п. 183 или п. 180), получим $2\leqslant x\leqslant 3$.

Таким образом множество решений заданного неравенства есть отрезок $[2;\ 3]$.

185. Логарифмические неравенства. При решении неравенств вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ следует помнить, что логарифмическая функция $y=\log_a x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$ (см. п. 96). Значит, в случае, когда $a>1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству того

же смысла $f(x)>g(x)$. В случае же когда $0<a<1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x)<g(x)$. При этом следует учитывать, что логарифмическая функция определена лишь на множестве положительных чисел. Значит, должны выполняться неравенства $f(x)>0$ и $g(x)>0$. В итоге от неравенства $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ мы переходим к системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$$

Заметим, что первую систему можно упростить: неравенство $f(x)>0$ вытекает из неравенств $f(x)>g(x)$, $g(x)>0$, поэтому неравенство $f(x)>0$ можно опустить, т. е. переписать систему в виде

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$

Аналогично вторую из написанных выше систем можно переписать в виде

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x+59)>-2$.

Решение. Так как $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$, то данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}}(2x+59)>\log_{\frac{1}{3}} 9$. Далее имеем:

$$\begin{cases} 2x+59>0, \\ 2x+59<9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-29{,}5, \\ x<-25; \end{cases}$$

откуда $-29{,}5<x<-25$.

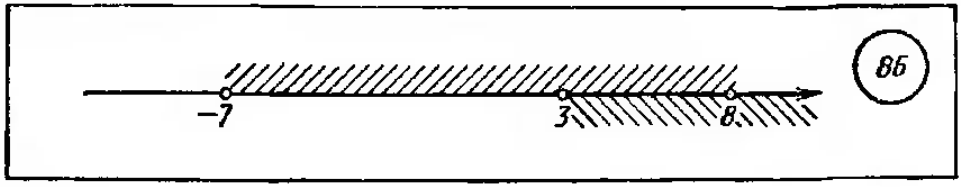
Пример 2. Решить неравенство $\lg(x+2)<2-\lg(2x-6)$.

Решение. Чтобы все логарифмы имели смысл, должны выполняться неравенства $x+2>0$ и $2x-6>0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем заданное неравенство:

$$\lg(x+2)+\lg(2x-6)<2,\ \lg(x+2)(2x-6)<\lg 100.$$

Таким образом, заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 2x-6>0, \\ (x+2)(2x-6)<100. \end{cases}$$



86

Имеем последовательно:

$$\begin{cases} x>-2, \\ x>3, \\ x^2-x-56<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ (x+7)(x-8)<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ -7<x<8. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 86) устанавливаем, что множество решений последней системы, а значит, и заданного неравенства есть промежуток (3; 8).

186*. Иррациональные неравенства. При решении *иррациональных неравенств* используется следующее утверждение:

Т.6.8. Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают только неотрицательные значения, то, возведя обе части неравенства в квадрат (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному (на множестве X). Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень (с сохранением знака неравенства) всегда является равносильным преобразованием неравенства.

Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)}<g(x)$. (1)

Ясно, что решение этого неравенства является в то же время решением неравенства $f(x)\geqslant 0$ и решением неравенства $g(x)>0$ (из неравенства (1) следует, что $g(x)>\sqrt{f(x)}\geqslant 0$). Значит, неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ \sqrt{f(x)}<g(x). \end{cases}$$

Так как при выполнении условий, задаваемых первыми двумя неравенствами этой системы, обе части третьего неравенства системы определены и принимают только неотрицательные значения, то их возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Выполнив это преобразование, придем к системе

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<(g(x))^2. \end{cases}$$

Итак, неравенство $\sqrt{f(x)}<g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<(g(x))^2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь неравенство вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$. (2)

Как и выше, заключаем, что $f(x)\geqslant 0$, но в отличие от предыдущего случая здесь $g(x)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения. Поэтому заданное неравенство (2) рассмотрим в каждом из следующих случаев: $g(x)<0$, $g(x)\geqslant 0$. Получим совокупность систем

$$\begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)}>g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)\geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)}>g(x). \end{cases}$$

В первой из этих систем можно опустить последнее неравенство — оно вытекает из первых двух неравенств системы. Во второй системе можно выполнить возведение в квадрат обеих частей последнего неравенства.

В итоге приходим к следующему результату: неравенство $\sqrt{f(x)}>g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)\geqslant 0, \\ f(x)>(g(x))^2. \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Решение. Это неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-12\geqslant 0, \\ x>0, \\ x^2-x-12<x^2. \end{cases}$$

Решив систему, находим $x\geqslant 4$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x^2-3x+2\geqslant 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2. \end{cases}$$

Второе неравенство второй системы можно опустить как следствие третьего неравенства той же системы.

Решив первую систему, получим $x<-8$, из второй систе-

мы получаем $-3 \leqslant x < -\frac{7}{9}$. Объединив найденные решения, получим $x < -\frac{7}{9}$.

187. Решение тригонометрических неравенств. Рассмотрим примеры графического решения простейших *тригонометрических неравенств*, т. е. неравенств вида $f(x) > a$ (или $f(x) < a$), где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций.

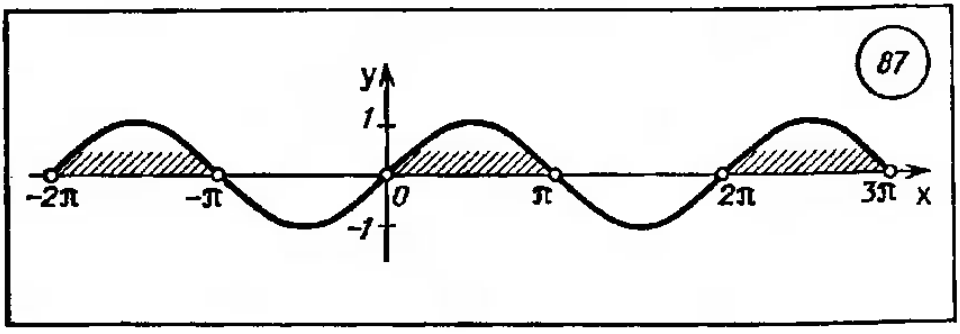
Пример 1. Решить неравенство $\sin x > 0$.

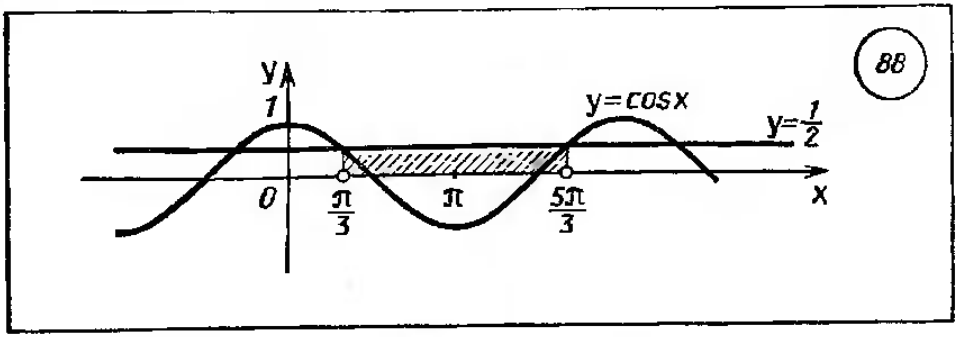
Решение. Построим график функции $y = \sin x$ и выберем на оси x значения аргумента x, которым соответствуют точки графика, лежащие выше оси x. Одним из промежутков, содержащих такие точки оси x, является интервал $(0; \pi)$ (рис. 87), а всего таких интервалов будет бесконечно много, причем в силу периодичности функции $y = \sin x$ каждый из них получается из $(0; \pi)$ сдвигом по оси x на $2\pi k$, где $k \in Z$. Таким образом, решением заданного неравенства служит объединение интервалов вида $(0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, т. е. $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. Это можно записать так: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 2. Решить неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Построим график функции $y = \cos x$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$. Нас интересуют те значения аргумента x, которым соответствуют точки графика, лежащие ниже прямой $y = \frac{1}{2}$. Одним из нужных нам промежутков является интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ (рис. 88). Воспользовавшись периодичностью функции $y = \cos x$, запишем ответ:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in Z.$$



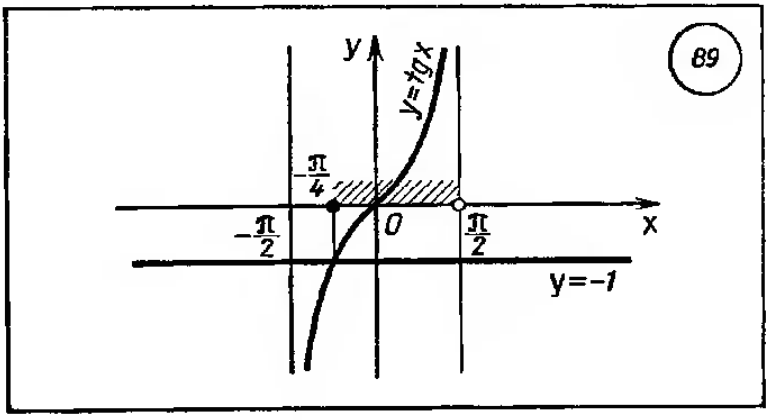


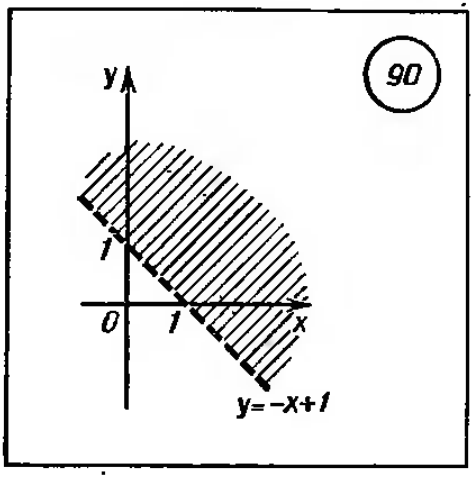
Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

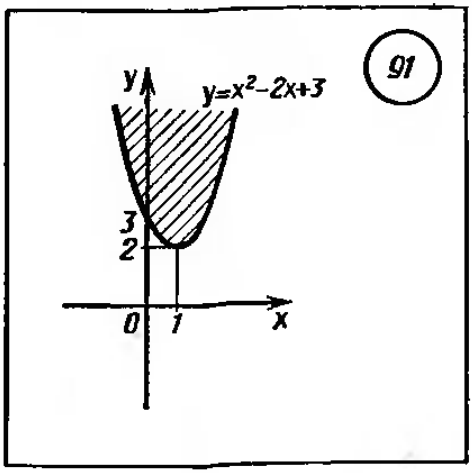
Решение. Построим график функции $y=\operatorname{tg} x$ и проведем прямую $y=-1$. Нас интересуют те значения x, которым соответствуют точки графика, лежащие не ниже прямой $y=-1$. Одним из нужных нам промежутков является $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 89), а всего таких промежутков будет бесконечно много, причем в силу периодичности функции $y=\operatorname{tg} x$ каждый получается из $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ сдвигом по оси x на πk, где $k \in Z$. Это позволяет записать решение следующим образом:

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k, \; k \in Z.$$

188. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Рассмотрим неравенство $f(x; y) > g(x; y)$. *Решением неравенства с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающая неравенство в верное числовое неравенство. Известно, что пара действительных чисел $(x; y)$ однозначно определяет точку координатной плоскости. Это дает возможность изобразить решения неравенства или систе-







мы неравенств с двумя переменными геометрически, в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x+y-1>0$.

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду $y>-x+1$. Построим на координатной плоскости прямую $y=-x+1$. Так как ординната любой точки, лежащей выше прямой $y=-x+1$, больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных выше этой прямой, и будет геометрическим изображением решений заданного неравенства (рис. 90).

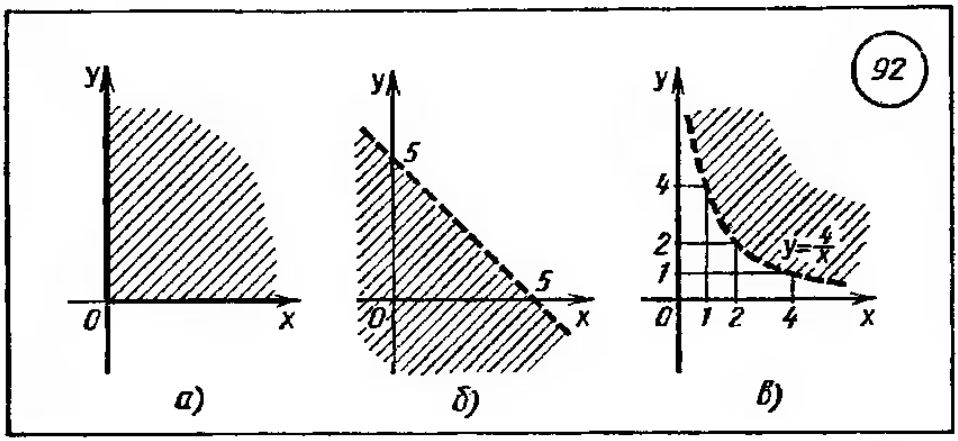
Пример 2. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x(x-2)\leqslant y-3$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $y\geqslant x^2-2x+3$. Построим на координатной плоскости параболу — график функции $y=x^2-2x+3$.

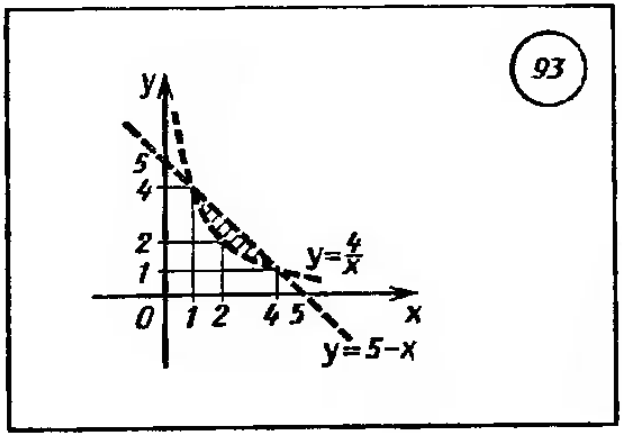
Так как ордината любой точки, лежащей выше параболы $y=x^2-2x+3$, больше, чем ординната точки, нмеющей ту же абсциссу, но лежащей на параболе, и так как неравенство $y\geqslant x^2-2x+3$ иестрогое, то геометрическим нзображением решений заданного неравенства будет множество точек плоскости, лежащих на параболе $y=x^2-2x+3$ и выше нее (рис. 91).

Пример 3. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ xy>4, \\ x+y<5. \end{cases}$$



Р е ш е н и е. Геометрическим изображением решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ является множество точек первого координатного угла (рис. 92, *а*). Геометрическим изображением решений неравенства $x+y<5$ или $y<5-x$ является множество точек, лежащих ниже прямой, служащей графиком функции $y=5-x$ (рис. 92, *б*). Наконец, геометрическим изображением решений неравенства $xy>4$ или, поскольку $x>0$, неравенства $y>\frac{4}{x}$ является множество точек, лежащих выше ветви гиперболы, служащей графиком функции $y=\frac{4}{x}$ (рис. 92, *в*). В итоге получаем множество точек координатной плоскости, лежащих в первом координатном углу ниже прямой, служащей графиком функции $y=5-x$, и выше гиперболы, служащей графиком функции $y=\frac{4}{x}$ (рис. 93).



§ 18. Доказательство неравенств

189. Метод оценки знака разности. Суть этого метода заключается в следующем: для того чтобы установить справедливость неравенства $f(x; y; z) > g(x; y; z)$ $(f < g, f \geqslant g, f \leqslant g)$, составляют разность $f(x; y; z) - g(x; y; z)$ и доказывают, что она положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительна).

Пример. Доказать, что если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ *(среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического;* это неравенство называется *неравенством Коши).*

Решение. Составим разность $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$. Имеем

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

Неравенство $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, причем равенство имеет место лишь в случае $x = y$.

Из неравенства Коши, в частности, следует неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, справедливое для всех $x > 0$.

190. Синтетический метод доказательства неравенств. Суть этого метода заключается в следующем: с помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (опорных) неравенств. Опорными неравенствами являются, например, такие:

1) $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (неравенство Коши);

2) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, где $x > 0$;

3) $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$;

4) $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

Пример. Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, где a, b, c, d — неотрицательные числа.

Решение. Используем здесь в качестве опорного неравенство Коши, составленное для неотрицательных чисел

$x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{c+d}{2}$. Имеем $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}$. Применив теперь неравенство Коши к числам a и b, а также c и d, получим

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}.$$ Но $\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$.

Таким образом, $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

Равенство имеет место в случае, когда $a=b=c=d$.

191. Доказательство неравенств методом от противного. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нужно доказать истинность неравенства

$$f(x;\ y;\ z)>g(x;\ y;\ z). \qquad (1)$$

Предполагают противное, т. е. что хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство

$$f(x;\ y;\ z)\leqslant g(x;\ y;\ z). \qquad (2)$$

Используя свойства неравенств, выполняют преобразования неравенства (2). Если в результате этих преобразований получается ложное неравенство, то это означает, что предположение о справедливости неравенства (2) неверно, а потому верно неравенство (1)

Пример 1. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, то $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Решение. Предположим противное, т. е. что для некоторого набора значений a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}<\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Возведем обе его части в квадрат. Получим:

$$ab+bc+ad+cd<ab+2\sqrt{abcd}+cd,$$

откуда $bc+ad<2\sqrt{abcd}$ и далее $\frac{bc+ad}{2}<\sqrt{abcd}$. Но это противоречит неравенству Коши, составленному для неотрицательных чисел bc и ad.

Значит, наше предположение неверно, т. е. для любых неотрицательных значений a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Пример 2. Доказать неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos^2\alpha$.

Решение. Предположим противное, т. е. предположим, что существуют такие α и β, для которых выполняется неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)>\cos^2\alpha$.

Воспользовавшись формулами $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}{2}$ (см. п. 131) и $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (см. п. 129), получим $\frac{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}{2}>\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, откуда $\cos 2\beta>1$. Поскольку на самом деле $\cos 2\beta\leqslant 1$ при любых значениях β, то мы получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, а поэтому справедливо неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos^2\alpha$.

192*. Использование неравенств при решении уравнений. Пусть нужно решить уравнение $f(x)=g(x)$, и пусть существует такое число A, которое является одновременно наибольшим значением функции $y=f(x)$ и наименьшим значением функции $y=g(x)$. Тогда корнями уравнения $f(x)=g(x)$ являются общие корни уравнений $f(x)=A$, $g(x)=A$, и только они. Этот метод является частным случаем функционального метода решения уравнений (см. п. 158).

Пример. Решить уравнение $x^2+\frac{1}{x^2}=2-(x-1)^4$.

Решение. С одной стороны, $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$ при всех $x\neq 0$ (см. п. 189). С другой стороны, при всех x выполняется неравенство $2-(x-1)^4\leqslant 2$. Значит, корнями данного уравнения будут общие корни уравнений $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ и $2-(x-1)^4=2$ (если, конечно, такие общие корни есть; если их нет, то уравнение не имеет корней).

Из уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ находим $x_1=1$, $x_2=-1$. Из уравнения $2-(x-1)^4=2$ находим $x=1$.

Общим корнем этих уравнений является значение $x=1$, оно и является единственным корнем заданного уравнения.

ГЛАВА VII. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 19. Числовые последовательности

193. Определение последовательности. Пусть каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число: числу 1 соответствует число a_1, числу 2 — число a_2, числу 3 — число a_3, ..., числу n — число a_n и т. д.

Тогда говорят, что задана *числовая последовательность*, и пишут: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Иначе можно записать (a_n). Числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ называются *членами числовой последовательности*: a_1 — первый член, a_2 — второй член, ..., a_n — n-й член последовательности.

Пример 1. $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...$. Эта последовательность построена следующим образом: каждому натуральному числу соответствует его квадрат. Здесь $a_n = n^2$.

Пример 2. Для любой бесконечной десятичной дроби можно построить последовательность ее десятичных приближений по недостатку или по избытку. Например, для числа $e = 2{,}71828...$ последовательность десятичных приближений по недостатку имеет вид:

$$2;\ 2{,}7;\ 2{,}71;\ 2{,}718;\ 2{,}7182;\ 2{,}71828;\ ...\ .$$

194. Способы задания последовательности. Имеется три основных способа задания последовательности.

1. *Аналитический* — последовательность задается формулой n-го члена. Например, формулой $a_n = \frac{n}{n+1}$ задается последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, у которой

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, ...,$$

т. е. последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$.

2. *Рекуррентный* — любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены. При этом способе задания последовательности указывают ее первый член (или несколько начальных членов) и формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Пример. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Имеем $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$; $a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$;
$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$; $a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13$;
$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$; $a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21$ ... .

В итоге получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ ...\ .$$

Каждый ее член, кроме первых двух, равен сумме двух предшествующих ему членов.

3. *Словесный* — задание последовательности описанием. Такова, например, последовательность десятичных приближений по недостатку числа e (см. п. 193).

195. Возрастание и убывание последовательности. Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если каждый ее

члеи меньше следующего за ним, т. е. если $a_n < a_{n+1}$ для любого n. Последовательность (a_n) иазывается *убывающей*, если каждый ее член больше следующего за ним, т. е. если $a_n > a_{n+1}$ для любого n.

Рассмотрим примеры:

1) 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...— возрастающая последовательность.

2) 2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n-1$, ...— возрастающая последовательность.

3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$— возрастающая последовательность.

4) $-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$— убывающая последовательность.

5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$— убывающая последовательность.

6) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$— эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей.

7) 3, 3, 3, 3, ..., 3, ...— здесь мы имеем *постоянную* или стациоиарную последовательность.

196. Определение арифметической прогрессии. Последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией*. Число d — *разность прогрессии*. Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно (см. п. 194) равенством $a_{n+1} = a_n + d$. Например, $a_5 = a_4 + d$; $a_{94} = a_{93} + d$ и т. д.

При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, при $d < 0$ убывает.

Пример 1. Последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...— арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 3$, $d = 2$.

Пример 2. Пусть даны $a_1 = -2$, $d = 0{,}5$. Этими условиями задается арифметическая прогрессия, у которой $a_2 = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$; $a_3 = a_2 + d = -1{,}5 + 0{,}5 = -1$; $a_4 = a_3 + d = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$; $a_5 = a_4 + d = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$; $a_6 = a_5 + d = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$.

Получаем арифметическую прогрессию -2; $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; 0; 0,5; ... .

Пример 3. Постоянная последовательность 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 2$, $d = 0$.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся арифметической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной арифметической прогрессии*.

Для указания того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда используется обозначение

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

197. Свойства арифметической прогрессии

1^0. *Формула n-го члена арифметической прогрессии:*

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

2^0. *Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Здесь $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

3^0. *Характеристическое свойство арифметической прогрессии:* последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной арифметической прогрессии), равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Пример 1. Бегун за первую минуту бега пробежал 400 м, а в каждую следующую минуту пробегал на 5 м меньше, чем в предыдущую. Какой путь пробежал он за 1 ч?

Решение. За первую минуту бегун пробежал 400 м, за вторую — 395 м, за третью — 390 м и т. д. Числа 400, 395, 390, ... образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 400$, $d = -5$. Путь за 1 ч, т. е. за 60 мин, равен сумме первых 60 членов прогрессии. Применив формулу (2), получим:

$$S_{60} = \frac{2a_1 + d \cdot 59}{2} \cdot 60 = \frac{300 - 59 \cdot 5}{2} \cdot 60 = 15\,150.$$

Итак, за 1 ч бегун пробежит 15 км 150 м.

Пример 2. При делении 13-го члена арифметической прогрессии на ее 3-й член в частном получается 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получается 2 и в остатке 8. Найти 20-й член прогрессии.

Решение. Из условия следует, что $a_{13} = 3a_3$, а $a_{18} = 2a_7 + 8$ (см. п. 3). По формуле n-го члена имеем $a_3 = a_1 + 2d$, $a_{13} =$

$=a_1+12d$, $a_7=a_1+6d$, $a_{18}=a_1+17d$ и приходим к системе двух уравнений с двумя переменными a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1+12d=3(a_1+2d), \\ a_1+17d=2(a_1+6d)+8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} a_1=3d, \\ a_1=5d-8, \end{cases}$$

откуда $d=4$, $a_1=12$. Зная a_1 и d, нетрудно найти a_{20}:

$$a_{20}=a_1+19d=12+19\cdot 4=88.$$

198. Определение геометрической прогрессии. Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется *геометрической прогрессией*. Число q — *знаменатель прогрессии*. Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно (см. п. 193) равенством $b_{n+1}=b_nq$, где $b_1\neq 0$, $q\neq 0$. Например, $b_7=b_6q$, $b_{54}=b_{53}q$.

Пример 1. Последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...— это геометрическая прогрессия, у которой $b_1=1$, $q=2$.

Пример 2. Последовательность 100, 30, 9, $\frac{27}{10}$, $\frac{31}{100}$, $\frac{243}{1000}$, ...— это геометрическая прогрессия, у которой $b_1=100$, $q=\frac{3}{10}$.

Пример 3. Пусть даны $b_1=2$, $q=-3$. Этими условиями задается геометрическая прогрессия, у которой $b_2=b_1q=2\times(-3)=-6$; $b_3=b_2q=(-6)\cdot(-3)=18$; $b_4=b_3q=18\cdot(-3)=-54$; $b_5=b_4q=(-54)\cdot(-3)=162$, ... Получаем геометрическую прогрессию 2, -6, 18, -54, 162, ...

Пример 4. Постоянная последовательность 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... является геометрической прогрессией, у которой $b_1=2$, $q=1$.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся геометрической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной геометрической прогрессии*.

Для указания того, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, иногда используется обозначение

$$\overline{\cdot\cdot}\, b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots .$$

199. Свойства геометрической прогрессии.

1°. *Формула n-го члена геометрической прогрессии:*

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

2°. *Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:*

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1};$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}.$$

Здесь $S_1 = b_1$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, $q \neq 1$; если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

3°. *Характеристическое свойство геометрической прогрессии:* последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной геометрической прогрессии), связаи с предыдущим и последующим членами формулой

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Пример 1. Найти 8-й член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Решение. Так как $b_n = b_1 q^{n-1}$ (свойство 1^0), то получаем $96 = 3q^{n-1}$, $q^{n-1} = 32$ или $q^n = 32q$.

С другой стороны, по свойству 2^0

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}, \text{ откуда находим:}$$

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q-1}, \text{ или } \frac{q^n - 1}{q-1} = 63. \qquad (1)$$

Но $q^n = 32q$ (см. выше). Подставив это выражение в равеиство (1), получим:

$$\frac{32q - 1}{q-1} = 63, \; 32q - 1 = 63q - 63, \; q = 2.$$

Зная b_1 и q, найдем b_8. Имеем:

$$b_8 = b_1 q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

Пример 2. Три числа образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел будет представлять собой конечную арифметическую прогрессию. Если третье число этой новой тройки

увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первую тройку чисел.

Р е ш е н и е. Обозначим искомые три числа b_1, b_2, b_3. Используя обозначения $\div$ для арифметической прогрессии и $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{\div}}$ для геометрической прогрессии, запишем условие задачи следующим образом:

$$1)\ \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{\div}}\ b_1,\ b_2,\ b_3.$$

$$2)\ \div\ b_1,\ b_2+2,\ b_3.$$

$$3)\ \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{\div}}\ b_1,\ b_2+2,\ b_3+9.$$

Воспользовавшись характеристическими свойствами арифметической (свойство 3^0, п. 197) и геометрической (свойство 3^0, п. 199) прогрессий, получим соответственно: 1) $b_2^2=b_1\cdot b_3$; 2) $b_2+2=\frac{b_1+b_3}{2}$; 3) $(b_2+2)^2=b_1(b_3+9)$.

Так как $b_2=b_1q$, а $b_3=b_1q^2$, то:

1) $b_1^2q^2=b_1b_1q^2$; 2) $b_1q+2=\frac{b_1+b_1q^2}{2}$; 3) $(b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+9)$. Первое условие как тождественное равенство можно опустить. Мы приходим к системе даух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} 2(b_1q+2)=b_1+b_1q^2, \\ (b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+9). \end{cases}$$

Имеем далее:

$$\begin{cases} b_1(1+q^2-2q)=4, \\ b_1(9-4q)=4. \end{cases}$$

Выразив b_1 через q из второго уравнения системы: $b_1=\frac{4}{9-4q}$ — и подставив это выражение вместо b_1 в первое уравнение системы, получим $\frac{1+q^2-2q}{9-4q}=1$, откуда находим $q_1=2$, $q_2=-4$.

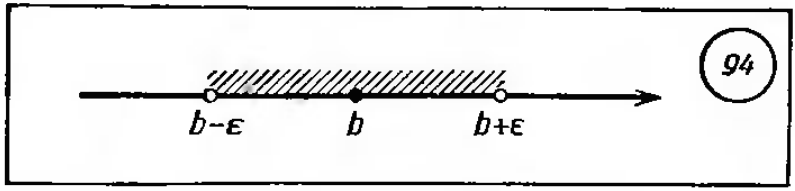
Следовательно, $b_1=4$ при $q=2$ и $b_1=\frac{4}{25}$ при $q=-4$.

Значит, условию задачи удовлетворяют две тройки чисел:

1) 4, 8, 16 (при $b_1=4$, $q=2$);

2) $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$ (при $b_1=\frac{4}{25}$, $q=-4$).

200. Понятие о пределе последовательности. Число b называется *пределом последовательности* (a_n), если, какое бы поло-



94

жительное число ни взять (это число обычно обозначают ε — греческая буква «эпсилон»), найдется номер N, начиная с которого (т. е. при $n \geqslant N$) отличие a_n от b по модулю будет меньше ε, т. е.

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, или $a_n \to b$. Говорят, что последовательность (a_n) *сходится к* b.

Геометрический смысл предела последовательности: если b — предел последовательности (a_n), то, какую бы окрестность точки b ни выбрать, вся последовательность, начиная с некоторого номера N, будет изображаться точками, лежащими в этой окрестности (рис. 94); *окрестность точки* b — это интервал с центром в точке b.

Примеры. Рассмотрим последовательности:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Чем больше номер члена последовательности, тем меньше этот член отличается от числа 0. Эта последовательность сходится, предел ее равен 0, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$. Члены этой последовательности по мере увеличения номера все меньше и меньше отличаются от числа 1. Эта последовательность сходится, прнчем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

В самом деле, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется номер N, такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Чтобы найти такое N, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ и взять в качестве N любое натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству.

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$. Эта последовательность сходится, ее предел равен 0, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

4) 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, ... Эта последовательность не сходится, не имеет предела.

5) Постоянная последовательность $a, a, a, ..., a, ...$ сходится к пределу a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a=a$.

201. Вычисление пределов последовательностей. Для вычисления пределов последовательностей используются следующие утверждения:

1) Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится к числу 0 (см. пример 1 из п. 200):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

2) Последовательность q^n, где $|q|<1$, сходится к числу 0 (см. пример 3 из п. 200, где $q=\frac{1}{2}$):

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0, \text{ если } |q|<1.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a=a$ (см. пример 5 из п. 200).

4) Это утверждение носит название *теоремы об арифметических операциях над пределами.*

Т.7.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, то:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=ab$;
в) если $b\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$, а $\frac{1}{n}\to 0$, то $\frac{1}{n^2}\to$ $\to 0\cdot 0=0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Аналогично устанавливается, что $\frac{1}{n^k}\to 0$ для любого натурального k.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1}$.

Решение. Разделим почленно и числитель, и знаменатель данной дроби на наивысшую (из имеющихся) степень переменной n, т. е. на n^2. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Воспользовавшись теперь тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a=a$, и теоремой об арифметических операциях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1}=\frac{1+0+2\cdot 0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

202. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ — бесконечная геометрическая прогрессия, у которой $|q|<1$. Рассмотрим сумму первых ее n членов: $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Имеем (см. п. 199):

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Имеем (см. п. 201):

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{q-1}(q^n-1).=$$

$$=\frac{b_1}{q-1}(0-1)=\frac{b_1}{1-q}.$$

Итак, для бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q|<1$, существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, где $S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$.

Этот предел называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии* и обозначают S:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Пример. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$ равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти сумму первых 6 членов прогрессии.

Решение. Обозначим заданную прогрессию так: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$. По условию ее сумма равна 9, т. е. $\frac{b_1}{1-q}=9$.

Рассмотрим последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$. Каждый ее член получается из предыдущего умножением на q^2, т. е. это геометрическая прогрессия $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, у которой первый член равен b_1^2, т. е. $B_1=b_1^2$, а знаменатель Q равен q^2, т. е. $Q=q^2$. Так как $|q^2|<1$, т. е. $|Q|<1$, то сумма новой прогрессии равна $\frac{B_1}{1-Q}$. По условию эта сумма равна 40,5. Значит, в итоге мы приходим к системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases}\frac{b_1}{1-q}=9,\\ \frac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5.\end{cases}$$

Выразив b_1 из первого уравнения $b_1=9(1-q)$ и подставив результат во второе уравнение, получим $\frac{81(1-q)^2}{1-q^2}=\frac{81}{2}$, откуда $\frac{1-q}{1+q}=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{3}$.

Тогда $b_1=9(1-q)=9\left(1-\frac{1}{3}\right)=6$. Теперь можно найти сумму первых 6 членов прогрессии:

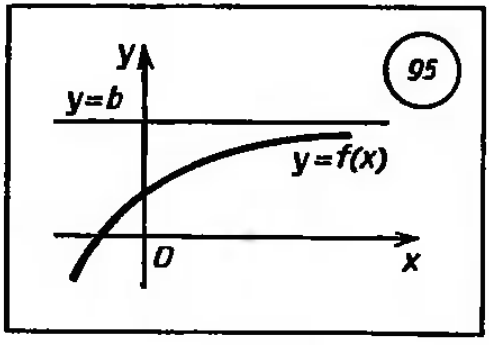
$$S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=8\frac{80}{81}.$$

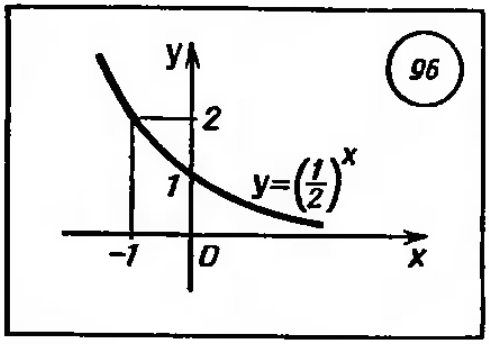
§ 20. Предел функции

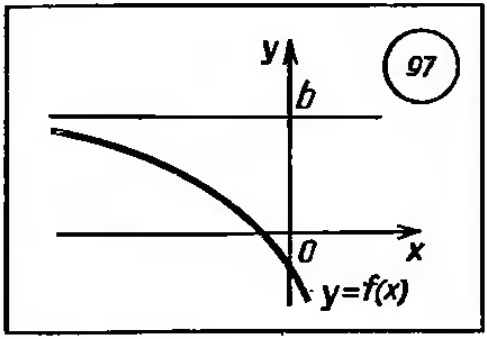
203. Предел функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$. Горизонтальная асимптота. Число b иазывается *пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к $+\infty$*, если, какое бы число $\varepsilon>0$ ни взять, найдется число $M>0$, такое, что для всех $x>M$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

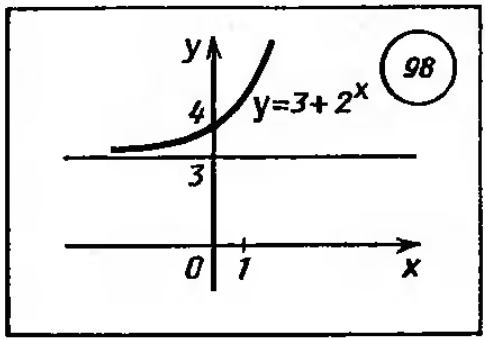
Геометрически это означает, что график функции $y=f(x)$ при выборе достаточно больших зиачений x безгранично приближается к прямой $y=b$ (рис. 95), т. е. расстояние от точки графика до прямой $y=b$ по мере удаления точки в бесконечность может быть сделано меньше любого числа $\varepsilon>0$. Прямая $y=b$ называется в этом случае *горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$*.

Возьмем для примера функцию $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Для этой функции имеем $f(5)=\frac{1}{32}$; $f(10)=\frac{1}{1024}$; $f(100)=\frac{1}{2^{100}}$; $f(1000)=\frac{1}{2^{1000}}$. Замечаем, что, чем больше выбирается значение аргумента, тем меньше отличается от нуля значение функции, причем это







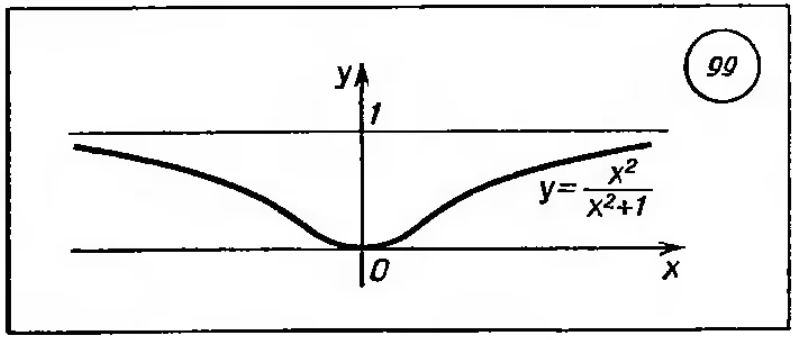


отличие можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$. Это подтверждается и геометрически: прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 96).

Прямая $y=b$ может быть горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ и при выборе достаточно больших по модулю, но отрицательных значений аргумента (рис. 97). Тогда говорят, что число b является пределом функции $y=f(x)$ *при стремлении* x *к* $-\infty$, и пишут: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$. Например, $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+2^x)=3$ (рис. 98).

Наконец, прямая $y=b$ может быть горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Так, прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота графика функции $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ (рис. 99). В этом случае говорят, что число b является пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к ∞, и пишут: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$. Так, верны равенства $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при стрем-*



лении x *к* $-\infty$, если, какое бы число $\varepsilon>0$ ни взять, найдется число $M>0$, такое, что для всех $x<-M$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при стремлении* x *к* ∞, если, какое бы число $\varepsilon>0$ ни взять, найдется число $M>0$, такое, что для всех x, таких, что $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Зная предел функции при $x\to\infty$, можно построить горизонтальную асимптоту графика (если предел равен b, то $y=b$ — горизонтальная асимптота); обратно: если известна горизонтальная асимптота графика функции, можно сделать вывод о ее пределе при $x\to\infty$ (если $y=b$ — горизонтальная асимптота, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$).

204. Вычисление пределов функций при $x\to\infty$. Для вычисления пределов функций при $x\to\infty$ используются следующие теоремы об операциях над пределами:

Т.7.2. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=a+b$ *(теорема о пределе суммы).*

Т.7.3. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=ab$ *(теорема о пределе произведения).*

Т.7.4. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, то $\lim\limits_{x\to\infty} kf(x)=ka$ *(теорема о вынесении постоянного множителя за знак предела).*

Т.7.5. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$ и $b\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ *(теорема о пределе частного).*

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x+3}{x^3+4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель почленно на x^3, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}$ и далее

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1+4\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ (см. п. 203), то, воспользовавшись теоремамн Т.7.2 — Т.7.5, получим $\frac{3-2\cdot0+0\cdot0+8\cdot0\cdot0\cdot0}{1+4\cdot0\cdot0\cdot0}=3$.

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x+8}{x^3+4}=3$.

Пример 2. Найти горизонтальную асимптоту графика функции $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ при $x\to+\infty$.

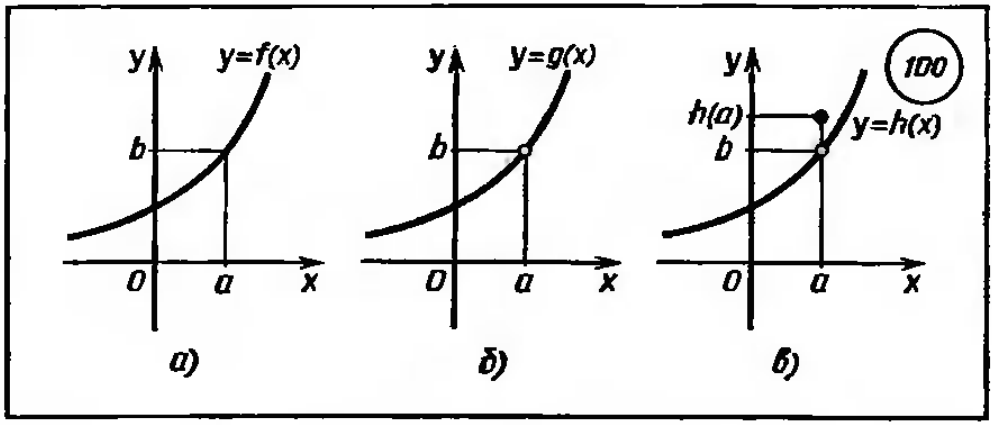
Решение. Чтобы найти горизонтальную асимптоту, надо вычислить предел функции при $x\to+\infty$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0.$$

Значит, $y=0$ — горизонтальная асимптота графнка функции $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.

205. Предел функции в точке. Непрерывные функции. Рассмотрим функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ и $y=h(x)$, графики которых изображены на рисунке 100. Это разные функции, они отличаются своим поведением в точке $x=a$. Если же $x\neq a$, то $f(x)=g(x)=h(x)$. Во всех трех случаях замечаем, что, чем ближе x к a, тем меньше отличается значение функции $f(x)$, или $g(x)$, или $h(x)$ от числа b — это отличие характеризуется выражением соответственно $|f(x)-b|$, $|g(x)-b|$, $|h(x)-b|$. Для любой из рассматриваемых функций говорят, что *предел функции при стремлении x к a равен b*; пишут соответственно: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$. Подчеркнем еще раз, что при этом значение функции в самой точке a (и даже сам факт существования или несуществования этого значения) не принимается во внимание.

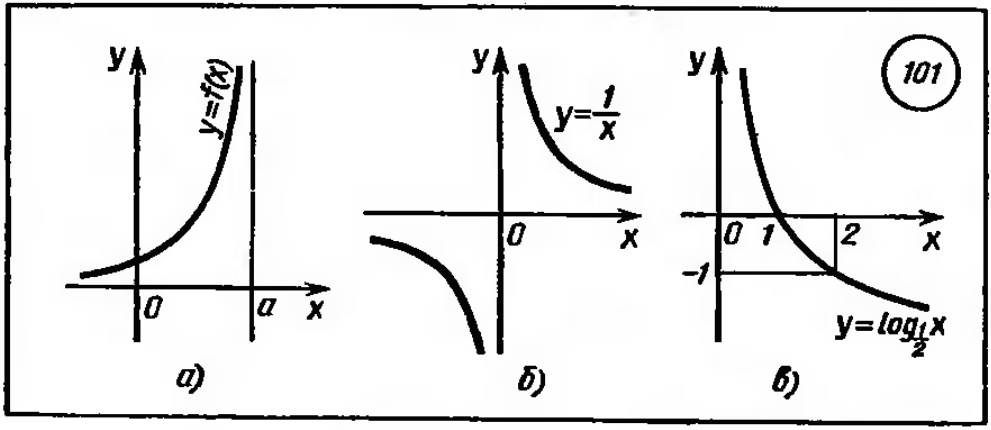


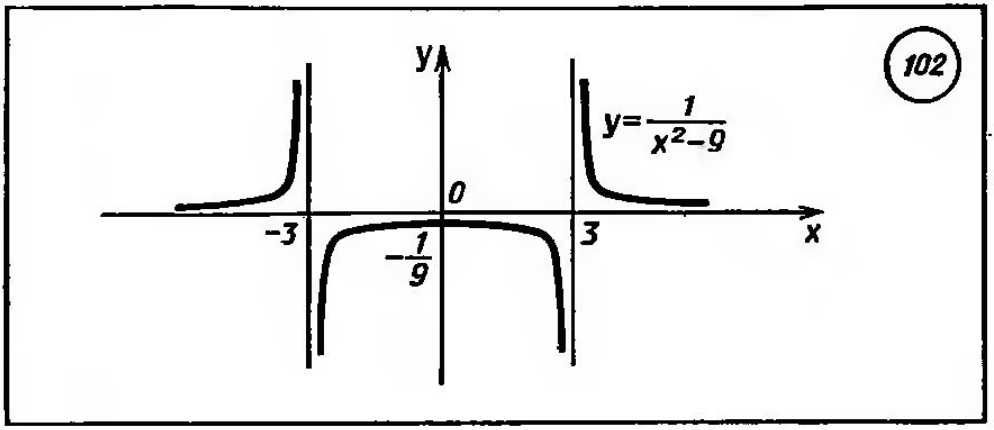
Определение формулируется так: число b называется пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к a, если, какое бы число $\varepsilon>0$ ни взять, для всех достаточно близких к a значений x, т. е. для всех x из некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму эту точку, будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Вернемся еще раз к рисунку 100. Замечаем, что для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 100, a, выполняется равенство $b=f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функция называется *непрерывной в точке* a. Если функция непрерывна в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то она называется *непрерывной на этом интервале*. Если функция непрерывна на интервале $(a;\ b)$, определена в точках a и b и при стремлении точки x интервала $(a;\ b)$ к точкам a и b значения функции $y=f(x)$ стремятся соответственно к значениям $f(a)$, $f(b)$, то функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;\ b]$.

206. Вертикальная асимптота. График функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 101, a, обладает следующей особенностью: какое бы число $p>0$ ни взять, можно указать такую окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $(x\neq a)$ соответствующая ордината графика по модулю будет больше p, т. е. $|f(x)|>p$. Говорят, что прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой графика функции* $y=f(x)$, и пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Например, график функции $y=\frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$ (рис. 101, *б*); график функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$ (рис. 101, *в*); график функции $y=\operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$ и т. д.





Если $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ и в точке a функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны, причем $p(a)\neq 0$, $q(a)=0$, то $x=a$ — вертикальная асимптота графика функции $y=f(x)$.

Например, график функции $y=\frac{1}{x^2-9}$ имеет две вертикальные асимптоты: $x=3$ и $x=-3$ (рис. 102) — при указанных значениях x знаменатель x^2-9 обращается в нуль.

207. Вычисление пределов функций в точке. Для вычисления пределов функций в точке основными являются следующие факты:

1) любая элементарная функция, т. е. функция, заданная аналитически рациональным (см. п. 48), иррациональным (см. п. 48), трансцендентным (см. п. 118) выражением или выражением, составленным из перечисленных с помощью конечного числа арифметических операций, непрерывна в любой внутренней точке области определения функции (т. е. в любой точке, принадлежащей области определения функции вместе с некоторой своей окрестностью); если $x=a$ — внутренняя точка области определения сложной функции $f(g(x))$, то и сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке a;

2) если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+x^2}{3x+1}$.

Решение. Точка $x=4$ — внутренняя точка области определения функции $f(x)=\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$, значит, функция непре-

рывна в этой точке. Имеем $f(4)=\frac{\sqrt{4}+4^2}{2\cdot 4+1}=2$. Значит, $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}=2$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}$ непрерывна в точке $x=\pi$. Имеем:

$$f(\pi)=\frac{\sin\pi}{\cos^2\pi+\operatorname{tg}\pi}=\frac{0}{1+0}=0.$$

Значит,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}=0.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ не определена в точке $x=3$, так как в этой точке знаменатель дроби обращается в нуль. Поскольку числитель x^2+9 отличен от нуля в точке $x=3$, то пишут: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}=\infty$ (см. п. 206); прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

Решение. Здесь в отличие от предыдущего примера и числитель, и знаменатель обращаются в 0 при $x=3$. В подобных случаях для вычисления предела необходимы тождественные преобразования выражения, задающего функцию. Имеем $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$. Поскольку при $x\to 3$ значение функции в самой точке $x=3$ не принимается во внимание (см. п. 205), дробь можно сократить на $x-3$, получим $\frac{x+3}{x-2}$. Итак,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$.

Решение. При $x=-2$ и числитель, и знаменатель обра-

щаются в нуль. Выполним следующие преобразования заданного выражения:

$$\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x})^2-3^2}=$$

$$=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)}=-(\sqrt{7-x}+3).$$

Итак,

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\lim_{x\to-2}(-\sqrt{7-x}-3)=-(\sqrt{7+2}+3)=-6.$$

§ 21. Производная и ее применения

208. Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x и x_1. Разность x_1-x называется *приращением аргумента*, а разность $f(x_1)-f(x)$ — *приращением функции* при переходе от значения аргумента x к значению аргумента x_1. Приращение аргумента обозначают Δx; значит, $\Delta x=x_1-x$, т. е. $x_1=x+\Delta x$. Приращение функции обозначают Δf или Δy; значит, $\Delta f=f(x_1)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Пример 1. Найти приращение функции $y=x^3$ при переходе от значения аргумента x к значению $x+\Delta x$.

Решение. Имеем $f(x)=x^3$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$. Значит, $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

Итак, $\Delta f=(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)\Delta x$. По этой формуле можно вычислять значение Δf для любых заданных x и Δx. Например, при $x=2$, $\Delta x=0{,}1$ имеем:

$$\Delta f=f(2,1)-f(2)=(3\cdot2^2+3\cdot2\cdot0{,}1+0{,}1^2)\cdot0{,}1=1{,}261;$$

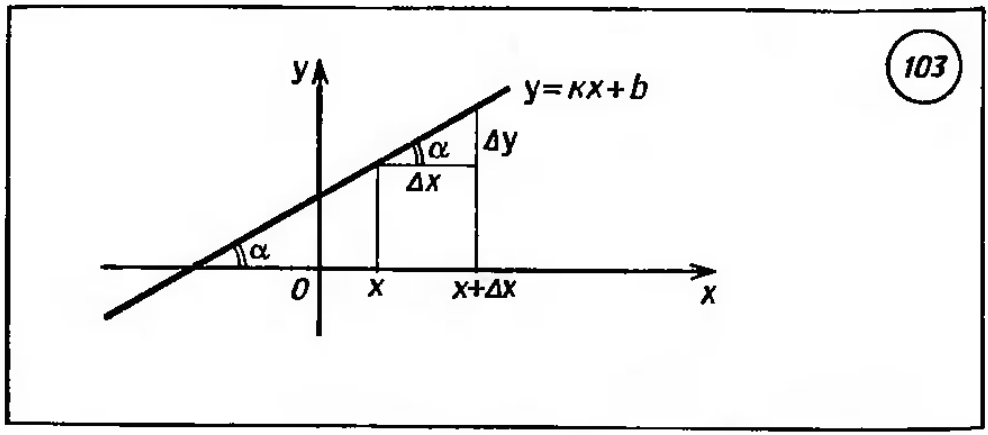
при $x=1$, $\Delta x=-0{,}2$ получаем $\Delta f=f(0{,}8)-f(1)=(3\cdot1^2+3\cdot1\cdot(-0{,}2)+(-0{,}2)^2)\cdot(-0{,}2)=-0{,}488$.

Пример 2. Доказать, что для линейной функции $y=kx+b$ справедливо равенство $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение. Имеем $f(x)=kx+b$, $f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+b$. Значит, $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(k(x+\Delta x)+b)-(kx+b)=k\Delta x$, откуда получаем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл доказанного равенства проиллюстрирован на рисунке 103.

209. Определение производной. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x и в некоторой окрестности этой точки. Пусть Δx — приращение аргумента, причем такое, что точка $x+\Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x, а Δf — соответствующее приращение функции, т. е. $\Delta f=f(x+\Delta x)-$



— $f(x)$. Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, то функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, а этот предел называется *значением производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ или y'. Итак,

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$f'(x)$ — это новая функция, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел; эту функцию называют *производной функции* $y=f(x)$.

Пример 1. Найти $f'(2)$, если $f(x)=x^2$.

Решение. Имеем $f(2)=2^2=4$, $f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2$, $\Delta f=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-4=4\Delta x+(\Delta x)^2$.

Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.

Значит, $f'(2)=4$.

Опираясь на определение, можно рекомендовать следующий план отыскания производной функции $y=f(x)$:

1) Фиксируем значение x, находим $f(x)$.
2) Даем аргументу x приращение Δx, находим $f(x+\Delta x)$.
3) Вычисляем приращение функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$.
4) Составляем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
5) Находим предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y=x^3$.

Решение.

1) $f(x)=x^3$.
2) $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$.
3) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=(3x^2+3x\cdot\Delta x+$ $+(\Delta x)^2)\Delta x$ (см. п. 208).

4) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2$.

Итак, $(x^3)'=3x^2$.

210. Формулы дифференцирования. Таблица производных. Операцию отыскания производной называют *дифференцированием.* В п. 209 получена одна из формул дифференцирования: $(x^3)'=3x^2$. По такому же плану можно вывести остальные формулы, которые приведены ниже.

1. $(C)'=0$.
2. $(kx+b)=k$.
3. $(x^r)'=rx^{r-1}$.
4. $(e^x)'=e^x$.
5. $(a^x)'=a^x\ln a$.
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.
7. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.
8. $(\sin x)'=\cos x$.
9. $(\cos x)'=-\sin x$.
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Например, $(2x-3)'=2$ (формула 2); $(x^{10})'=10x^9$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$, $(\sqrt[5]{x^3})'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ (формула 3); $(5^x)'=5^x\ln 5$ (формула 4); $(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$ (формула 7).

211. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то:

1°. Их сумма дифференцируема в точке x и

$(u+v)'=u'+v'$ *(теорема о дифференцировании суммы);*

2°. Функция Cu, где C — постоянная, дифференцируема в точке x и

$(Cu)'=Cu'$ *(теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной);*

3°. Произведение функций u и v дифференцируемо в точке x и

$(uv)'=u'v+uv'$ *(теорема о дифференцировании произведения);*

4^0. Частное функций u и v дифференцируемо в точке x, если $v(x) \neq 0$, и

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ *(теорема о дифференцировании частного).*

Пример 1. Найти производную функции $y = 2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5$.

Решение. Воспользовавшись теоремами 1^0 и 2^0, получим:

$$(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5)' = (2\sin x)' + \left(-\frac{1}{3}\cos x\right)' + 5' =$$
$$= 2(\sin x)' - \frac{1}{3}(\cos x)' + 5'.$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 210). Получим $2\cos x - \frac{1}{3}(-\sin x) + 0 = 2\cos x + \frac{1}{3}\sin x$.

Итак, $\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = 2\cos x + \frac{\sin x}{3}$.

Пример 2. Найти $(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x)'$.

Решение. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании произведения, получим $(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' \log_3 x + x^{\frac{2}{5}} (\log_3 x)'$. Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 210). Получим $\frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} \log_3 x + x^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{x \ln 3}$.

Итак, $\left(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x\right)' = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} \log_3 x + \frac{x^{-\frac{3}{5}}}{\ln 3} = \frac{0{,}4 \ln x + 1}{\sqrt[5]{x^3} \cdot \ln 3}$.

Пример 3. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \frac{2^x}{x^2+1}$.

Решение. Сначала найдем $f'(x)$. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании частного, получим $f'(x) = \frac{(2^x)'(x^2+1) - 2^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$ и далее $\frac{2^x \ln 2 \cdot (x^2+1) - 2^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$.

Теперь вычислим $f'(0)$. Имеем:

$$f'(0) = \frac{2^0 \ln 2 \cdot (0^2+1) - 2^0 \cdot 2 \cdot 0}{(0^2+1)^2} = \ln 2.$$

212. Сложная функция и ее дифференцирование. Рассмотрим функцию $y = \sin x^2$. Чтобы найти значение этой функции

в фиксированной точке x, нужно: 1) вычислить x^2; 2) найти значение синуса при полученном зиачении x^2. Иными словами, сначала надо найти значение функции $g(x)=x^2$, а потом найти $\sin g(x)$. В подобных случаях говорят, что задана *сложная функция* $f(g(x))$. В нашем примере $u=g(x)=x^2$, а $f(u)=\sin u$. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Составить сложную функцию $f(g(x))$, если $g(x)=\ln x$, $f(u)=\sqrt{u}$.

Решение. $f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\ln x}$.

Пример 2. Из каких функций составлена сложная функция $y=\operatorname{tg}^5(2x+1)$?

Решение. Эта функция состоит из трех функций: $g(x)=2x+1$, $h(u)=\operatorname{tg} u$, $f(z)=z^5$. В самом деле, $f(h(g(x)))=(h(g(x)))^5=(\operatorname{tg}(g(x)))^5=(\operatorname{tg}(2x+1))^5=\operatorname{tg}^5(2x+1)$.

Пусть $y=f(g(x))$ — сложная функция, причем функция $u=g(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция $y=f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем

$$y'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Запись $f'(g(x))$ означает, что производиая вычисляется по формуле для $f'(x)$, но вместо x подставляется $g(x)$.

Пример 3. Найти $((3x+5)^4)'$.

Решение. Здесь $g(x)=3x+5$, $f(u)=u^4$, $f(g(x))=(3x+5)^4$. Значит, $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=4(3x+5)^3\cdot(3x+5)'=4(3x+5)^3\cdot 3=12(3x+5)^3$.

Пример 4. Найти $(\operatorname{tg}(x^2+x+1))'$.

Решение. Так как $(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}$, то $(\operatorname{tg}(x^2+x+1))'=\frac{1}{\cos^2(x^2+x+1)}\cdot(x^2+x+1)'=\frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x+1)}$.

213. Физический смысл производной. Если $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ выражает *скорость движения в момент времени* t, т. е. $v=s'(t)$ (мгновенная скорость).

Например, закои свободного падения тела выражается зависимостью $s=\frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$$v=s'=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Вообще производная функции $y=f(x)$ в точке x выражает *скорость изменения функции в точке* x, т. е. скорость про-

текания процесса, описываемого зависимостью $y=f(x)$. В этом состоит *физический смысл производной*. Например, для функции $y=x^2$ имеем $f'(x)=2x$, при $x=2$ имеем $f'(2)=4$, а при $x=3$ имеем $f'(3)=6$. Это значит, что в точке $x=2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точке $x=3$ — в 6 раз быстрее.

214. Вторая производная и ее физический смысл. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Это новая функция, которая, в свою очередь, может иметь производиую. Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной* функции $y=f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или y''.

Пример 1. Найти y'', если $y=x^{10}$.

Решение. Имеем $(x^{10})'=10x^9$, а $(10x^9)'=90x^8$. Итак, $(x^{10})''=90x^8$.

Пусть $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда вторая производиая выражает скорость изменения скорости этого движения, т. е. *ускорение* $a=s''(t)$. В этом состоит *физический смысл второй производной*.

Пример 2. Материальная точка двнжется прямолинейно по закону $s=\frac{1}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

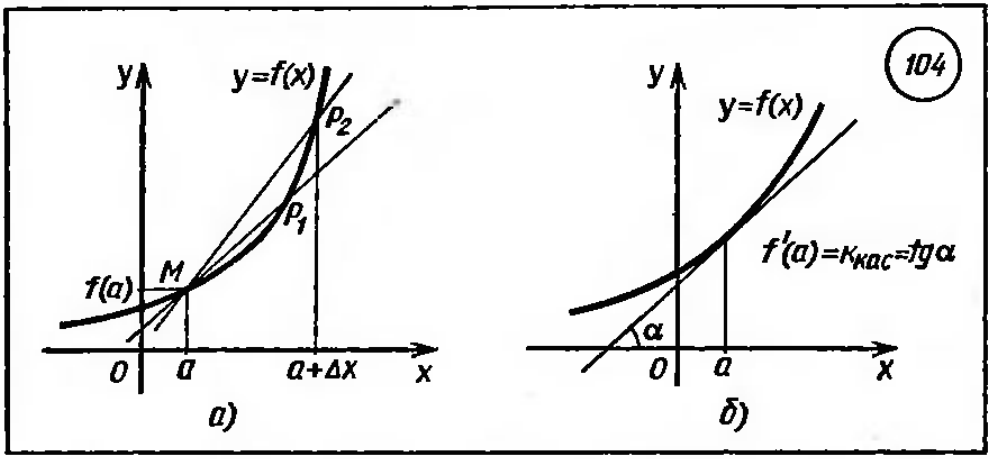
Решение. По второму закону Ньютоиа $F=ma$, где F — сила, действующая на тело, a — ускорение, m — масса; $a=s''$. Имеем $s'=((2t-1)^{-1})'=-(2t-1)^{-2}\cdot(2t-1)'=-2(2t-1)^{-2}$;

$$s''=(-2(2t-1)^{-2})'=-2\cdot(-2)\cdot(2t-1)^{-3}\cdot(2t-1)'=$$

$$=8(2t-1)^{-3}=\frac{8}{(2t-1)^3}.$$

Значит, $F=ma=\frac{8m}{(2t-1)^3}=8\ ms^3$, т. е. сила F пропорциональна s^3 ($8m$ — коэффициент пропорциональности).

215. Касательная к графику функции. *Касательной* к графику функции $y=f(x)$, дифференцируемой в точке $x=a$, называется прямая, проходящая через точку $(a;\ f(a))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(a)$. Геометрический смысл этого определения состоит в следующем. Рассмотрим график функции $y=f(x)$, дифференцируемой в точке a, выделим на нем точку $M(a;\ f(a))$ и проведем секущую MP_2, где P_2 — точка графика, соответствующая значению аргумента $a+\Delta x$ (рис. 104, *а*). Угловой коэффициент прямой MP_2 вычисляется по формуле $k_{сек}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. п. 208).



Если точку P двигать по графику, приближая ее к точке M, то прямая MP начнет поворачиваться вокруг точки M. Чаще всего в этом процессе секущая MP стремится занять некоторое предельное положение. Это предельное положение представляет собой прямую, с которой практически сливается график функции $y=f(x)$ в некоторой окрестности точки a; эта прямая и есть касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$. В самом деле, угловой коэффициент такой предельной прямой (обозначим его k) получается из углового коэффициента секущей в процессе предельного перехода от P к M:

$$k=\lim_{P\to M} k_{\text{сек}}.$$

Но условие $P\to M$ можно заменить условием $\Delta x\to 0$, а вместо $k_{\text{сек}}$ написать $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. В итоге получаем:

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — это значение производной функции $y=f(x)$ в фиксированной точке $x=a$, т. е. $f'(a)$ (см. п. 209).

Итак, $k=f'(a)$, т. е. *значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$* (рис. 104, *б*). В этом состоит *геометрический смысл производной.*

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$, то в этой точке к графику можно провести касательную; верно и обратное: если в точке $x=a$ к графику функции $y=f(x)$ можно провести невертикальную касательную, то функция дифференцируема в точке x.

Это позволяет по графику функции находить точки, в которых функция имеет или не имеет производную. Так, функция, график которой изображен на рисунке 105, дифференцируема во всех точках, кроме точки $x=1$; в этой точке график имеет заострение и касательную провести нельзя.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет вид:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a). \qquad (1)$$

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x=4$.

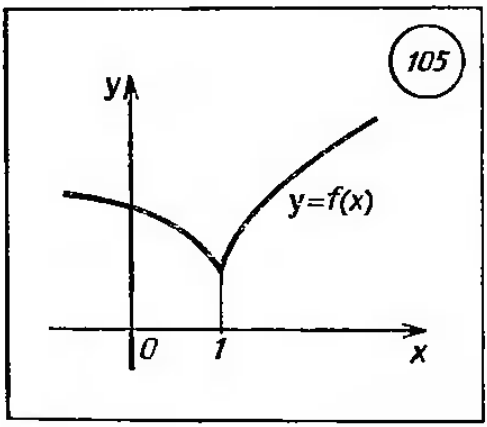
Решение. Имеем $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $a=4$, $f(a)=\sqrt{4}=2$, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$. Подставив найденные значения a, $f(a)$ и $f'(a)$ в уравнение (1), получим:

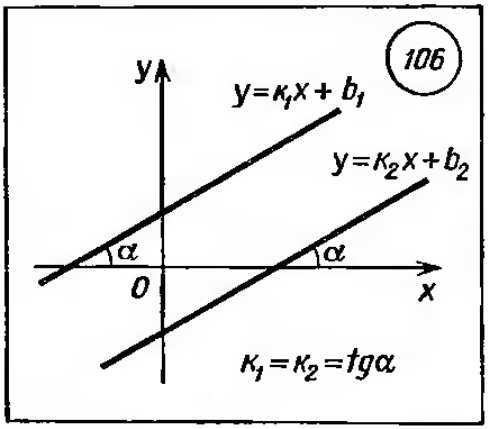
$$y=2+\frac{1}{4}(x-4), \text{ т. е. } y=\frac{1}{4}x+1.$$

Пример 2. Найти угол, который образует с осью x касательная к графику функции $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$, проведенная в точке $x=0$.

Решение. Имеем $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x\cdot 3=\sqrt{3}\cos 3x$; $a=0$, $f'(a)=\sqrt{3}\cos 0=\sqrt{3}$. Значит, $k_{кас}=\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, откуда заключаем, что искомый угол α равен $60°$.

Пример 3. К графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y=-x+2$.





Р е ш е н и е. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны (рис. 106). Угловой коэффициент заданной прямой равен -1, а угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Значит, точку касания мы можем найти из уравнения $f'(a)=-1$.

Имеем $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$; $f'(x)=\frac{(x+2)'(x-2)-(x+2)(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$=\frac{1\cdot(x-2)-1\cdot(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}$; значит, $f'(a)=-\frac{4}{(a-2)^2}$.

Решим уравнение $-\frac{4}{(a-2)^2}=-1$. Имеем $(a-2)^2=4$, значит, либо $a-2=2$, откуда $a_1=4$, либо $a-2=-2$, откуда $a_2=0$.

Если $a=4$, то $f(a)=\frac{4+2}{4-2}=3$ и уравнение касательной имеет вид $y=3-(x-4)$, т. е. $y=7-x$.

Если $a=0$, то $f(a)=\frac{0+2}{0-2}=-1$ и уравнение касательной имеет вид $y=-1-(x-0)$, т. е. $y=-x-1$.

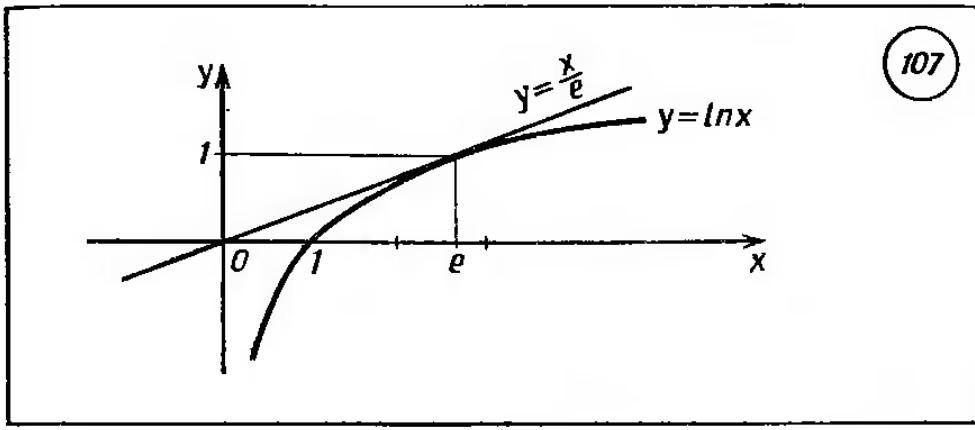
П р и м е р 4. Через точку $O(0;0)$ провести касательную к графику функции $y=\ln x$.

Р е ш е н и е. Здесь, как и в предыдущем примере, неизвестна точка касания $x=a$. Чтобы ее найти, составим уравнение касательной в общем виде. Имеем $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, значит, $f(a)=\ln a$, $f'(a)=\frac{1}{a}$ и уравнение касательной имеет вид:

$$y=\ln a+\frac{1}{a}(x-a). \qquad (2)$$

По условию касательная должна проходить через точку $O(0;0)$, т. е. координаты точки $O(0;0)$ должны удовлетворять уравнению (2). Подставив $x=0$, $y=0$ в уравнение (2), получим $0=\ln a+\frac{1}{a}(0-a)$, откуда $0=\ln a-1$, $\ln a=1$, $a=e$. Если теперь в уравнение (2) подставить найденное значение точки касания $a=e$, получим $y=\ln e+\frac{1}{e}(x-e)$, т. е. $y=1+\frac{x}{e}-1$, $y=\frac{x}{e}$. Это — уравнение искомой касательной (рис. 107).

216. Применение производной к исследованию функций на монотонность. Производная позволяет во многих случаях сравнительно просто исследовать функцию на монотонность. Достигается это с помощью следующих двух теорем:



Т.7.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутреиних точках этого промежутка имеет неотрицательную производиую ($f'(x)\geqslant 0$), причем равенство $f'(x)=0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y=f(x)$ возрастает иа промежутке X.

Т.7.2. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неположительную производную ($f'(x)\leqslant 0$), причем равенство $f'(x)=0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y=f(x)$ убывает на промежутке X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию $y=x^5+x^3+1$.

Решение. Имеем $y'=5x^4+3x^2$. Справедливо неравенство $5x^4+3x^2\geqslant 0$, причем знак равенства имеет место лишь в одной точке $x=0$. Значит, по теореме 7.1 функция $y=x^5+x^3+1$ возрастает на всей числовой прямой.

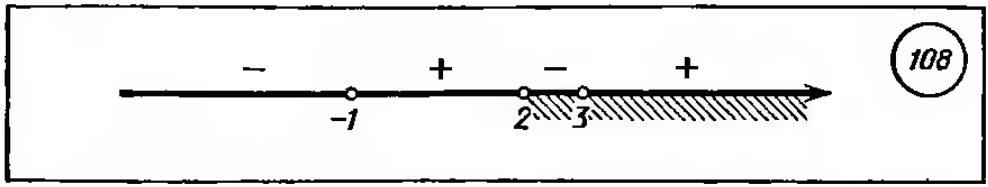
Пример 2. Исследовать на монотонность функцию $y=2\sin x-3x$.

Решение. Имеем $y'=2\cos x-3$. Так как $|\cos x|\leqslant 1$, то $2\cos x-3<0$ при всех x. Значит, по теореме 7.2 функция $y=2\sin x-3x$ убывает на всей числовой прямой.

Пример 3. Исследовать на монотонность функцию $y=\frac{x^2}{2}-3\ln(x-2)$.

Решение. Имеем $y'=\frac{1}{2}\cdot 2x-3\cdot\frac{1}{x-2}=x-\frac{3}{x-2}=$

$=\frac{x^2-2x-3}{x-2}=\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$.



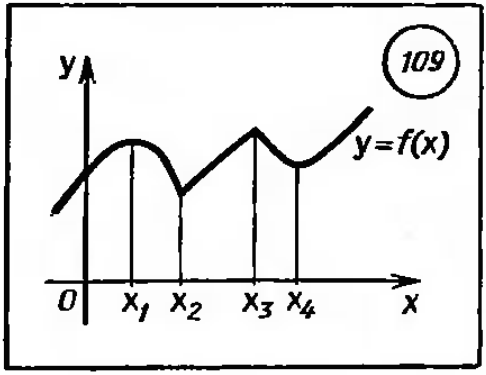
Знаки выражения $\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ меняются так, как показано на рисунке 108 (см. п. 183). Но область определения исследуемой функции задается неравенством $x>2$. Значит, из показанных на рисуике четырех промежутков нас интересуют только два: промежуток $(2; 3)$ — на нем $y'<0$, значит, функция на этом интервале убывает — и промежуток $(3; +\infty)$ — на нем $y'>0$, значит, функция иа этом промежутке возрастает.

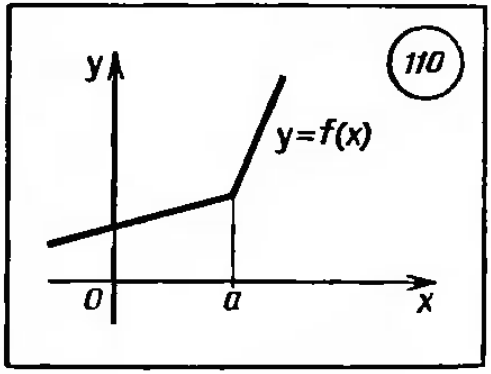
217. Применение производной к исследованию функций на экстремум. Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет *максимум (минимум) в точке* $x=a$, если у этой точки существует окрестность, в которой $f(x)<f(a)$ $(f(x)>f(a))$ для $x\neq a$.

Так, функция, график которой изображен на рисунке 109, имеет максимум в точках x_1 и x_3 и минимум в точках x_2 и x_4.

Точки максимума и минимума объединяются общим термином — *точки экстремума.*

Обратимся еще раз к рисунку 109. Замечаем, что в точках x_1 и x_4 к графику функции можно провести касательные, причем эти касательные будут параллельны оси x, а значит, угловой коэффициент каждой из касательных равен нулю; итак, $f'(x_1)=0$, $f'(x_4)=0$. В точках же x_2 и x_3 к графику касательной провести нельзя, значит, в этих точках производная функции $f(x)$ не существует (см. п. 215). Таким образом, в точках экстремума на рисунке 109 производная либо равна нулю, либо





не существует. Это — общее положение, подтверждаемое следующей теоремой:

Т.7.3. Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=a$ то либо $f'(a)=0$, либо $f'(a)$ не существует *(необходимое условие экстремума)*.

Точки, в которых $f'(a)=0$ или $f'(a)$ не существует и которые принадлежат области определения функции, называются *критическими*. Теорема 7.3 означает, что экстремумы функций могут достигаться только в критических точках. Обратная теорема, однако, неверна: не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Так, функция $y=x^3$ имеет одну критическую точку $x=0$ (в этой точке $y'=3x^2=0$), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Функция, график которой изображен на рисунке 110, имеет критическую точку $x=a$ — это точка излома, в ней y' не существует, но в этой точке нет ни максимума, ни минимума.

Как узнать, когда критическая точка функции является точкой экстремума? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Т.7.4. Пусть $x=a$ — критическая точка функции $y=f(x)$, и пусть существует интервал $(b; c)$, содержащий точку a внутри себя и такой, что на каждом из интервалов $(b; a)$ и $(a; c)$ производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если на $(b; a)$ производная $y'>0$, а на $(a; c)$ производная $y'<0$, то $x=a$ — точка максимума функции $y=f(x)$;

2) если на $(b; a)$ производная $y'<0$, а на $(a; c)$ производная $y'>0$, то $x=a$ — точка минимума функции $y=f(x)$;

3) если и на $(b; a)$, и на $(a; c)$ производная $y'<0$ или $y'>0$, то $x=a$ не является точкой экстремума функции $y=f(x)$ *(достаточное условие экстремума)*.

Из теорем 7.3 и 7.4 вытекает следующее правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум:

1) Найти область определения функции.

2) Найти $f'(x)$.

3) Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$.

4) Найти точки, в которых $f'(x)$ не существует.

5) Отметить на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y=f(x)$; получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y=f(x)$ сохраняет постоянный знак.

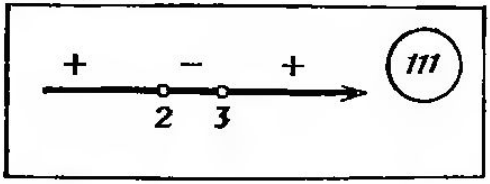


Рис. 111

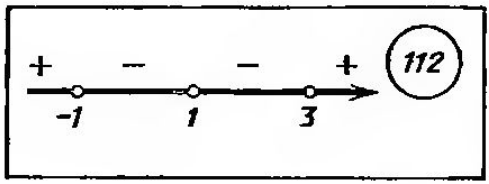


Рис. 112

6) Определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. 5.

7) Сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек в соответствии с теоремой 7.4.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$y=2x^3-15x^2+36x+1.$$

Решение. 1) Функция определена при всех x.

2) $y'=6x^2-30x+36$.

3) Из уравнения $6x^2-30x+36=0$ находим $x_1=2$, $x_2=3$.

4) y' существует при всех x.

5) Отметим точки $x_1=2$, $x_2=3$ на координатной прямой (рис. 111).

6) $y'=6(x-2)(x-3)$. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 111.

7) При переходе через точку $x=2$ слева направо производная y' меняет знак с «+» на «−», значит, $x=2$ — точка максимума; при переходе через точку $x=3$ производная меняет знак с «−» на «+», значит, $x=3$ — точка минимума. В точке $x=2$ имеем $y_{max}=29$, в точке $x=3$ имеем $y_{min}=28$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$y=\ln(x-2)+\ln x.$$

Решение. 1) Область определения функции задается неравенством $x>2$.

2) $y'=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{2x-2}{x(x-2)}$.

3) В области определения функции, т. е. при $x>2$, критических точек и тем более точек экстремума у функции нет.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{x^2-6x+9}{x-1}$.

Решение. 1) Область определения: $x\neq 1$.

2) $y'=\frac{(x^2-6x+9)'(x-1)-(x^2-6x+9)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{(2x-6)(x-1)-(x^2-6x+9)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(2(x-1)-(x-3))}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

3) $y'=0$ при $x=3$ или при $x=-1$.

4) y' не существует при $x=1$, но эта точка не принадлежит области определения функции.

5) Отметим на координатной прямой критические точки $x=-1$, $x=3$ и точку $x=1$ (рис. 112).

6) Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 112.

7) $x=-1$ — точка максимума, $y_{max}=-8$.
$x=3$ — точка минимума, $y_{min}=0$.

218. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Говорят, что функция $y=f(x)$, определенная на промежутке X, достигает на нем своего *наибольшего (наименьшего) значения*, если существует точка a, принадлежащая этому промежутку, такая, что для всех x из X выполняется неравенство $f(x)\leqslant f(a)$ $(f(x)\geqslant f(a))$.

Т.7.5. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

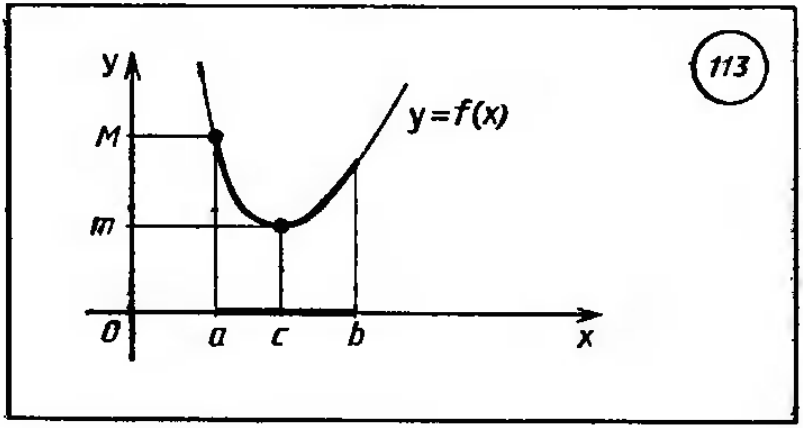
Наибольшее значение M и наименьшее значение m непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах (рис. 113). Если наибольшего (наименьшего) значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то эта точка является точкой экстремума; впрочем, для практики достаточно того, что эта точка критическая.

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1) Найти $f'(x)$.

2) Найти точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, что лежат внутри отрезка $[a; b]$.

3) Вычислить значения функции $y=f(x)$ в точках, полученных в п. 2, и на концах отрезка и выбрать из них наиболь-



шее и наименьшее; они и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$, которые можно обозначить так: $y_{наиб}$, $y_{наим}$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y=x^3-3x^2-45x+225$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение. 1) $y'=3x^2-6x-45$.

2) y' существует при всех x. Найдем точки, в которых $y'=0$. Имеем:

$$3x^2-6x-45=0,$$
$$x^2-2x-15=0,$$
$$x_1=-3,\ x_2=5.$$

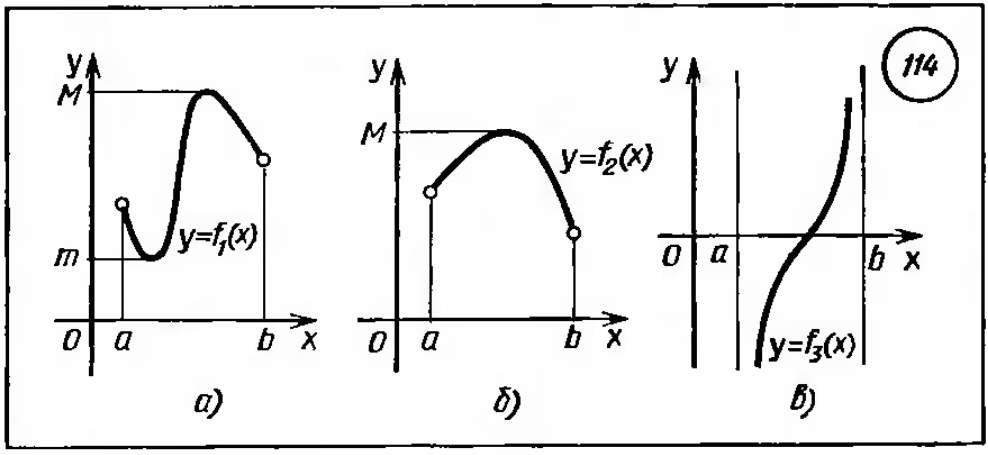
Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь точка $x=5$.

3) Вычислим значения функции в точках 0, 5, 6.

x	0	5	6
y	225	50	63

Наибольшим из найденных значений функции является число 225, наименьшим — число 50. Итак, $y_{наиб}=225$, $y_{наим}=50$.

219*. Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке. Задача отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке, например на интервале $(a; b)$, не всегда имеет решение. Так, на рисунке 114 изображены графики непрерывных на $(a; b)$ функций. Функция $y=f_1(x)$ достигает и наибольшего, и наименьшего значений, функция



$y=f_2(x)$ достигает наибольшего значения, а наименьшего значения на $(a;\ b)$ у нее нет, у функции $y=f_3(x)$ на $(a;\ b)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Если поставлена задача найти $y_{\text{наиб}}$ ($y_{\text{наим}}$) для непрерывной на $(a;\ b)$ функции $y=f(x)$, то она решается по тому же правилу, что соответствующая задача для отрезка $[a;\ b]$ (см. п. 218). Отличие: на третьем этапе вместо вычисления значений функции на концах отрезка находят пределы функции при приближении к концам интервала.

Пример. Найти наименьшее значение функции $y=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$ на интервале $(0;\ \pi)$.

Решение. 1) Найдем производную данной функции:

$$y'=2\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)\cdot\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)'=2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\times$$

$$\times\frac{(2+\cos x)'\sin x-(2+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}=2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\times$$

$$\times\frac{(-\sin x)\sin x-(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2(2+\cos x)(-\sin^2 x-\cos^2 x-2\cos x)}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-2(2+\cos x)(1+2\cos x)}{\sin^2 x}.$$

2) $y'=0$, если $1+2\cos x=0$ или $2+\cos x=0$. Но второе уравнение не имеет решений, так как $|\cos x|\leqslant 1$, а из первого находим $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ (см. п. 154). Из этих значений интервалу $(0;\ \pi)$ принадлежит лишь значение $x=\frac{2\pi}{3}$.

Производная y' не существует, если $\sin^3 x=0$. Но на $(0;\ \pi)$ это уравнение не имеет решений.

Итак, внутри интервала $(0;\ \pi)$ функция имеет лишь одну критическую точку $x=\frac{2\pi}{3}$.

3) Если $x=\frac{2\pi}{3}$, то $y=\left(\frac{2+\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}\right)^2=\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2=3$.

При приближении к концам интервала, т. е. при $x\to 0$ или при $x\to\pi$, знаменатель дроби $\frac{(2+\cos x)^2}{\sin^2 x}$ стремится к 0, а числитель соответственно к 9 или к 1. Значит, и в том и в другом случае $y\to+\infty$ (см. п. 206).

Поскольку при приближении к концам интервала $(0; \pi)$ значения функции неограниченно увеличиваются, наименьшее значение функция достигает в единственной критической точке, т. е. в точке $x=\frac{2\pi}{3}$. Итак, $y_{\text{наим}}=3$.

Иногда для отыскания наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции $y=f(x)$ на промежутке $(a; b)$ полезны два утверждения:

1^0. *Если функция $y=f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x=a$, причем это точка максимума, то $f(a)$ — наибольшее значение функции на промежутке X.*

2^0. *Если функция $y=f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x=a$, причем это точка минимума, то $f(a)$ — наименьшее значение функции на промежутке X.*

Так, в рассмотренном выше примере функция имела в интервале $(0; \pi)$ лишь одну критическую точку $x=\frac{2\pi}{3}$. При переходе через эту точку знаки производной меняются с «—» на «+». Зиачит, $x=\frac{2\pi}{3}$ — точка минимума, а потому $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3$ — иаименьшее значение функции на интервале $(0; \pi)$.

220. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величии удобно решать по следующему плану:

1) Выявляют оптимизируемую величину (т. е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется иайти) и обозначают ее буквой y (или S, p, r, R и т. д. в зависимости от сюжета задачи).

2) Одну из неизвестных величин (сторону, угол и т. д.) объявляют иезависимой переменной и обозначают буквой x: устанавливают реальные границы изменения x в соответствии с условиями задачи.

3) Исходя из конкретных условий данной задачи выражают y через x и известные величиины.

4) Для полученной на предыдущем этапе функции $y=f(x)$ иаходят наибольшее или наименьшее значение (в зависимости от требований задачи) по промежутку реального изменения x, найденному в п. 2.

5) Интерпретируют результат п. 4 для данной конкретной задачи.

На первых трех этапах составляется, как принято говорить, *математическая модель* задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой перемениой. Важно, чтобы было сравнительно нетрудно выразить y через x. На четвертом этапе составленная математическая модель исследу-

ется чаще всего с помощью производной, реже элементарным способом. В момент такого исследования сюжет самой задачи, послужившей отправной точкой для математической модели, исследователя не интересует. И лишь когда закончится решение задачи в рамках составленной математической модели, полученный результат интерпретируется для исходной задачи (пятый этап).

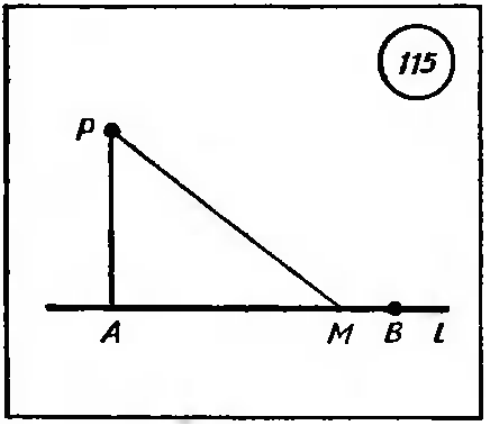
Пример 1. В степи, в 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей к поисковой партии точки, лежащей на шоссе, находится райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч?

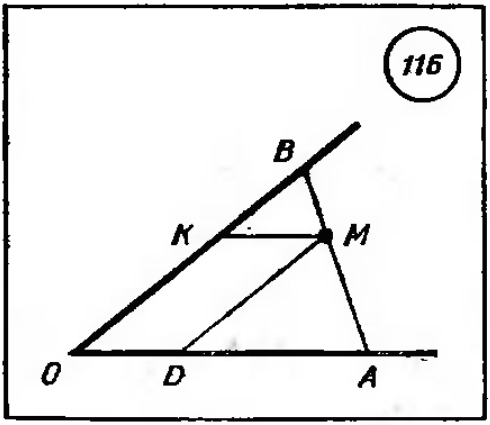
Решение. Сделаем чертеж. На рисунке 115 точка P означает местонахождение поисковой партии, прямая l — шоссе, B — райцентр, $PA=9$ км, $AB=15$ км, PMB — маршрут следования курьера, причем положение точки M между A и B пока неизвестно.

1) Оптимизируемая величина — время t движения курьера из P в B; надо найти $t_{наим}$.

2) Положим $AM=x$. По смыслу задачи точка M может занять любое положение между A и B, не исключая самих точек A и B. Значит, реальные границы изменения x таковы: $0\leqslant x\leqslant 15$.

3) Выразим t через x. Имеем $PM=\sqrt{PA^2+AM^2}=\sqrt{81+x^2}$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, т. е. время t_1, затраченное на этот путь, выражается формулой $t_1=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$. Далее, $MB=15-x$. Этот путь велосипедист едет





со скоростью 10 км/ч, т. е. время t_2, затраченное на этот путь, выражается формулой $t_2=\frac{15-x}{10}$. Суммарное время t, затраченное на весь путь, равно t_1+t_2, т. е. $t=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$.

4) Нужно найти наименьшее значение функции $t=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$ на отрезке $[0; 15]$. Используем для этого план из п. 218.

1. $t'=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(81+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{10}(-1)=\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}$.

2. t' существует при всех x. Найдем точки, в которых $t'=0$. Имеем $\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}=0$,

$$5x=4\sqrt{81+x^2},$$
$$25x^2=16(81+x^2),$$
$$9x^2=16\cdot 81,$$
$$x=4\cdot 3=12.$$

Значение $x=12$ принадлежит отрезку $[0; 15]$.

3) Составим таблицу значений функции, куда включим значения функции на концах отрезка и в найденной критической точке.

x	0	12	15
t	$\frac{105}{40}$	$\frac{87}{40}$	$\frac{5\sqrt{306}}{40}$

$$t_{\text{наим}}=\frac{87}{40}.$$

Четвертый этап решения задачи закончен, нам осталось интерпретировать полученный результат применительно к исходной задаче.

5) $t_{\text{наим}}$ достигается при $x=12$. Значит, велосипедисту надо ехать по такому маршруту PMB, чтобы расстояние между точками A и M по шоссе было равно 12 км.

Пример 2. Через фиксированную точку M внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади (рис. 116).

Решение.

1) Оптимизируемая величина — площадь S треугольника AOB.

2) Проведем $DM \parallel OB$, $MK \parallel OA$. Положим $KB=x$; реальные границы изменения x таковы: $0<x<+\infty$.

3) Поскольку M — фиксированная точка, отрезки DM и KM тоже фиксированны; положим $DM=a$, $KM=b$ и выразим S через x, a, b.

Рассмотрим треугольники MKB и AOB, они подобны, значит, $\frac{MK}{AO}=\frac{KB}{OB}$, т. е. $\frac{b}{AO}=\frac{x}{a+x}$. Отсюда находим $AO=\frac{b(a+x)}{x}$.

Далее имеем $S=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha$, где $\alpha=\angle AOB$.

Значит,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{b(a+x)}{x}\cdot(a+x)\sin\alpha=\frac{b\sin\alpha}{2}\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$$

(математическая модель задачи составлена).

4) Рассмотрим функцию $S=k\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$, $0<x<+\infty$, где $k=\frac{b\sin\alpha}{2}$. Найдем ее наименьшее значение.

1. $S'=k\cdot\frac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2}=k\cdot\frac{(a+x)(x-a)}{x^2}$.

2. Производная не существует в точке $x=0$, а обращается в нуль в точках $x=-a$, $x=a$. Из этих трех точек промежутку $(0;+\infty)$ принадлежит лишь точка $x=a$.

3. И при $x\to 0$, и при $x\to+\infty$ $S\to+\infty$. Значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=a$.

5) Вернемся к исходной геометрической задаче. Если $x=KB=a$, то, поскольку $OK=a$, MK — средняя линия треугольника AOB, значит, M — середина AB. Таким образом, чтобы от сторон угла отсечь треугольник наименьшей площади, надо провести через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

221. Применение производной для доказательства тождеств. Доказательство тождеств с помощью производной основано на следующей теореме:

Т.7.6. Для того чтобы непрерывная на промежутке X функция $y=f(x)$ была постоянна на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы ее производная во всех внутренних точках промежутка была равна нулю *(условие постоянства функции)*.

Пример. Доказать тождество

$$\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ и найдем ее производную.

Имеем $f'(x)=2\sin x\ \cos x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-$

$-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\ \sin\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$

$=\sin 2x-\sin 2x=0$. Значит, $f'(x)=0$ при всех x, а потому $f(x)$ — постоянная функция, $f(x)=C$. Осталось найти значение постоянной C. Для этого достаточно вычислить значение $f(x)$ при любом значении x, например при $x=0$. Имеем:

$$f(0)=\sin^2 0+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Итак, $f(0)=\frac{1}{4}$, а потому $C=\frac{1}{4}$. Значнт, справедливо тождество

$$\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

222. Применение производной для доказательства неравенств.

П р и м е р 1. Доказать, что при $0<x<\frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$2x+\frac{1}{x^2}>5.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ и найдем ее производную: $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$. Замечаем, что на интервале (0; 1) производная $f'(x)<0$, значит, функция $f(x)$ убывает на этом интервале (см. п. 216). Поэтому, в частности, при $0<x<\frac{1}{2}$ справедливо неравенство $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)$. Но $f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=5.$

Итак, $f(x)>5$, т. е. $2x+\frac{1}{x^2}>5$, что и требовалось доказать.

П р и м е р 2. Доказать, что если $\alpha<\beta$, то $\alpha+\cos\alpha<\beta+\cos\beta$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=x+\cos x$ и найдем ее производную $f'(x)=1-\sin x$. Замечаем, что $f'(x)\geqslant 0$, т. е.

функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Значит, из $\alpha<\beta$ вытекает $f(\alpha)<f(\beta)$, т. е. $\alpha+\cos\alpha<\beta+\cos\beta$.

Пример 3. Доказать, что при всех x справедливо неравенство

$$x^5+(1-x)^5\geqslant\frac{1}{16}\ .$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^5+(1-x)^5$ и исследуем ее на экстремум. Имеем:

$$f'(x)=5x^4-5(1-x)^4=5(x^2-(1-x)^2)(x^2+(1-x)^2)=$$
$$=5(2x-1)(2x^2-2x+1).$$

$f'(x)=0$ при $x=\frac{1}{2}$. Других критических точек у функции нет (уравнение $2x^2-2x+1=0$ не имеет корней). $f'(x)<0$ при $x<\frac{1}{2}$, а $f'(x)>0$ при $x>\frac{1}{2}$, значит, $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума функции. Поскольку других точек экстремума у данной непрерывной функции нет, то $f\left(\frac{1}{2}\right)$ — наименьшее значение функции (см. утверждение 2^0 из п. 219). Но $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^5+$ $+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}$.

Итак, $f(x)\geqslant\frac{1}{16}$, т. е. $x^5+(1-x)^5\geqslant\frac{1}{16}$.

223. Общая схема построения графика функции. Пусть нужно построить график функции $y=f(x)$. Для этого нужно рассмотреть некоторые свойства функции, что обычно сопровождается соответствующей иллюстрацией на координатной плоскости. Это помогает создать графический образ функции и обратно: графические представления помогают лучше понять свойства функции, а иногда и предвидеть их. Для этого полезно придерживаться следующего плана:

1) Найти область определения функции $y=f(x)$.

2) Найти точки, в которых $f(x)=0$ (это будут точки пересечения графика с осью абсцисс).

3) Отметить на оси x точки, найденные в п. 2, и точки, в которых функция не определена, найденные в п. 1; эти точки разбивают ось абсцисс на несколько промежутков, на каждом из которых функция сохраняет постоянный знак. Установить знак функции на каждом из промежутков.

4) Исследовать функцию на четность и нечетность (в случае четности или нечетности функции можно ограничиться исследованием и построением графика при $x\geqslant0$, а затем воспользоваться симметрией графика — см. п. 74, 75).

5) Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты (см. п. 203, 206).

6) Исследовать функцию на экстремумы.

7) Найти несколько дополнительных контрольных точек и построить график.

Для периодических функций полезно с самого начала найти основной период T (см. п. 76), с тем чтобы, исследовав функцию и построив ветвь графика на промежутке $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, построить затем, воспользовавшись периодичностью, весь график.

Если выполнение каких-либо шагов предложенной схемы сопряжено с техническими трудностями, их иногда можно опустить.

Пример. Построить график функции $y=x^3-4x$.

Решение. 1) Функция определена при всех x.

2) Из уравнения $x^3-4x=0$ находим $x(x^2-4)=0$, $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

3) Точки -2; 0; 2 разбивают ось абсцисс на 4 промежутка. Изменение знаков функции $y=x^3-4x$ на промежутках отражено на рисунке 117. Соответствующая иллюстрация на координатной плоскости представлена на рисунке 118, *а* (заштрихованы те полуполосы, где графика не будет).

4) $f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-(x^3-4x)=-f(x)$, значит, функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат.

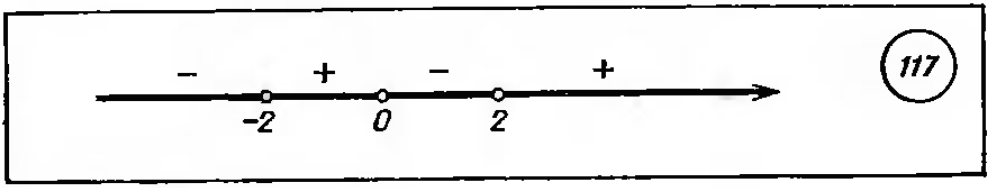
5) Асимптот у графика нет.

6) $y'=3x^2-4=3\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

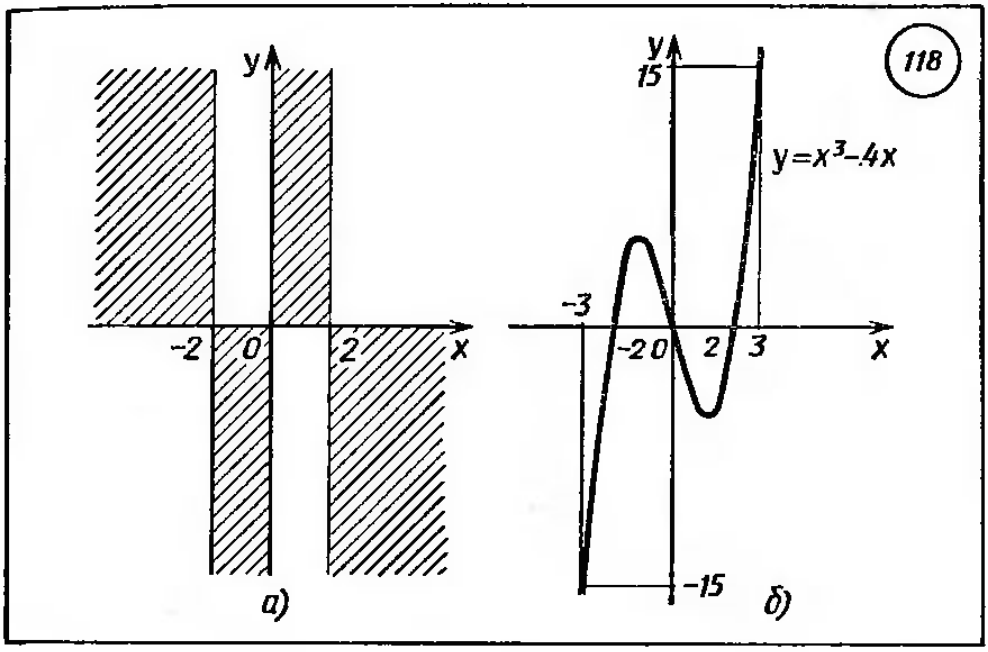
$y'=0$ при $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Точка $\frac{2}{\sqrt{3}}$ принадлежит отрезку [0; 2], из рисунка 118, *а* ясно, что в этой точке функция будет иметь минимум (здесь мы как раз имеем тот случай, когда графические представления позволяют сделать вывод о свойствах функции).

$$y_{\min}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3-4\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{16}{3\sqrt{3}}\approx-3{,}1.$$



117



Аналогично в точке $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум: $y_{max}\approx 3{,}1$.

7) В качестве дополнительных возьмем две точки $x=3$, $x=-3$. Имеем $f(3)=15$, $f(-3)=-15$.

Использовав найденные 7 точек, строим график функции (рис. 118,*б*).

Пример 2. Построить график функции $y=\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

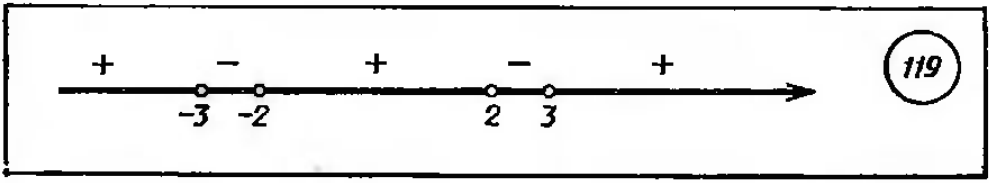
Решение. 1) Область определения: $x\neq\pm 2$.

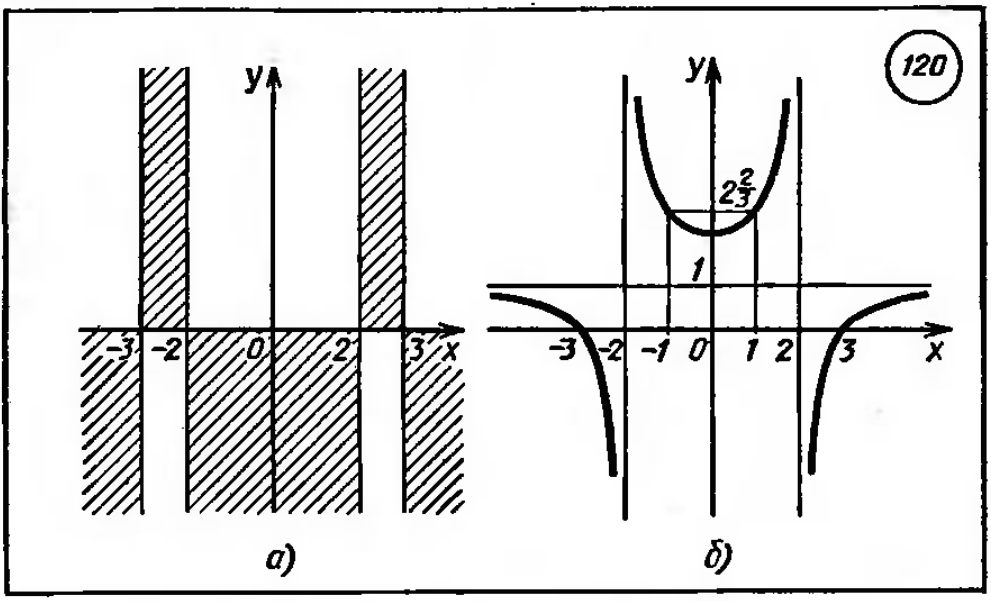
2) Из уравнения $\frac{x^2-9}{x^2-4}=0$ находим $x_1=3$, $x_2=-3$.

3) Точки 2, -2, 3, -3 разбивают ось абсцисс на 5 промежутков. Изменение знаков функции $y=\frac{x^2-9}{x^2-4}$ по промежуткам представлено на рисунке 119, соответствующая иллюстрация на координатной плоскости дана на рисунке 120,*а*.

4) Функция четна, так как $f(-x)=f(x)$. Значит, график функции симметричен относительно оси ординат.

5) $x=2$, $x=-2$ — вертикальные асимптоты (см. п. 206).





Чтобы найти горизонтальную асимптоту, вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-9}{x^2-4}$. Для этого числитель и знаменатель дроби разделим почленно на x^2 (см. п. 204).

Получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-9}{x^2-4}=1$, значит, $y=1$ — горизонтальная асимптота графика функции (см. п. 203).

6) $y'=\frac{(x^3-9)'(x^2-4)-(x^2-9)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{2x(x^3-4)-(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=$

$=\frac{10x}{(x^2-4)^2}$.

Производная обращается в нуль в точке $x=0$ и не существует в точках $x=\pm 2$. Но эти последние не принадлежат области определения функции, значит, функция имеет лишь одну критическую точку $x=0$. При переходе через эту точку производная меняет знак с «—» на «+», значит, $x=0$ — точка минимума: $y_{\min}=f(0)=\frac{9}{4}$.

7) В качестве дополнительных возьмем следующие точки: $x=\pm 1$, $x=\pm 4$. Имеем $f(1)=f(-1)=\frac{8}{3}$, $f(4)=f(-4)=\frac{7}{12}$.

Использовав найденные 7 точек, строим график функции (рис. 120, *б*).

§ 22. Первообразная и интеграл

224. Первообразная. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $f(x)=x^3$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=\frac{x^4}{4}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3=f(x)$.

2. Пусть $f(x)=\sin 3x$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$, так как $F'(x)=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'=-\frac{1}{3}\times$ $\times 3(-\sin 3x)=\sin 3x=f(x)$.

Для функции $f(x)=x^3$ в примере 1 мы нашли первообразную $F(x)=\frac{x^4}{4}$. Это не единственное решение задачи. Так, в качестве первообразной можно было взять и функцию $F_1(x)=$ $=\frac{x^4}{4}+3$ (поскольку $\left(\frac{x^4}{4}+3\right)'=x^3$), и функцию $F_2(x)=\frac{x^4}{4}-5$ (поскольку $\left(\frac{x^4}{4}-5\right)'=x^3$), и вообще любую функцию вида $\frac{x^4}{4}+C$. Так же обстоит дело в примере 2, где в качестве первообразной можно было взять любую функцию вида $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. Справедлива следующая теорема:

Т.7.7. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то у функции $f(x)$ бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная *(основное свойство первообразной)*.

Пример. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)=x^r$, где $r\neq -1$.

Решение. Одной из первообразных будет функция $F(x)=$ $=\frac{x^{r+1}}{r+1}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)'=\frac{1}{r+1}\cdot(r+1)x^r=x^r=f(x)$. Значит, общий вид первообразных:

$$\frac{x^{r+1}}{r+1}+C.$$

225. Таблица первообразных. Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и отталкиваясь от таблицы производных, (см. п. 210), получаем следующую таблицу первообразных (для простоты в таблице

приведена одна первообразная $F(x)$, а не общий вид первообразной $F(x)+C$):

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x)=k$	$F(x)=kx$	6) $f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
2) $f(x)=x^r$ $(r\neq -1)$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$	7) $f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
		8) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
3) $f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$	9) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
4) $f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
5) $f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

226. Правила вычисления первообразных. Пусть нужно найти первообразную функции $y=f(x)$. Иногда это можно сделать с помощью таблицы первообразных из п. 225; например, для функции $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$ по второй строке указанной таблицы находим $F(x)=\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}$, т. е. $F(x)=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}$, а общий вид первообразных: $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C$. Но чаще, прежде чем воспользоваться таблицей, приходится применять правила вычисления первообразных.

1^0. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x)+H(x)$ — первообразная для $f(x)+h(x)$.*

Иными словами, *первообразная суммы равна сумме первообразных.*

2^0. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Иными словами, *постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.*

3^0. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k, b — постоянные, причем $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$.*

Пример 1. Найти общий вид первообразных для функции

$$f(x)=2\sqrt{x}+3\sin x-2^x+\frac{\cos x}{3}.$$

Решение.

1) Воспользовавшись таблицей первообразных (п. 225), найдем первообразную для каждой из четырех функций, входящих в состав $f(x)$:

$$f_1(x)=\sqrt{x},\ f_2(x)=\sin x,\ f_3(x)=2^x,\ f_4(x)=\cos x.$$

Для функции $f_1(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ имеем $F_1(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Для функции $f_2(x)=\sin x$ имеем $F_2(x)=-\cos x$.

Для функции $f_3(x)=2^x$ имеем $F_3(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

Для функции $f_4(x)=\cos x$ имеем $F_4(x)=\sin x$.

2) Воспользовавшись правилом 2^0, получим, что для $2f_1(x)$ первообразной будет $2F_1(x)$, т. е. $2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$; для $3f_2(x)$ первообразной будет $3F_2(x)$, т. е. $-3\cos x$; для $-f_3(x)$ первообразной будет $-F_3(x)$, т. е. $-\dfrac{2^x}{\ln 2}$; для $\frac{1}{3}f_4(x)$ первообразной будет $\frac{1}{3}F_4(x)$, т. е. $\frac{1}{3}\sin x$.

3) Воспользовавшись правилом 1^0, получим, что для $f(x)$ первообразной будет следующая функция:

$$F(x)=2F_1(x)+3F_2(x)-F_3(x)+\frac{1}{3}F_4(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3\cos x-$$

$$-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}\sin x.$$

4) Общий вид первообразных для заданной функции:

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3\cos x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\sin x}{3}+C.$$

Пример 2. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)=(2x-1)^5$.

Решение. Для функции $h(x)=x^5$ первообразной будет $H(x)=\dfrac{x^6}{6}$. Тогда по правилу 3^0 для функции $h(2x-1)=(2x-1)^5$ первообразной будет $\frac{1}{2}H(2x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^6}{6}$.

Итак, $F(x)=\dfrac{(2x-1)^6}{12}$, а общий вид первообразных для заданной функции: $\dfrac{(2x-1)^6}{12}+C$.

Пример 3. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)=\sin^2 3x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$ (см. п. 129). Тогда $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x$. Для функции $f_1(x)=\frac{1}{2}$ первообразной будет $\frac{1}{2}x$, а для функции $f_2(x)=\cos 6x$ в соответствии с правилом 3^0 первообразной будет $\frac{\sin 6x}{6}$. Тогда для функции $f(x)=f_1(x)-\frac{1}{2}f_2(x)$ по правилам 1^0 и 2^0 первообразной будет $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6}$, т. е. $\frac{1}{2}x-\frac{\sin 6x}{12}$. Общий вид первообразных: $\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C$.

227. Интеграл. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n частей точками $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$; для однородности обозначений положим $a=x_0,\ b=x_n$ (рис. 121). Введем обозначения: $x_1-x_0=\Delta x_0,\ x_2-x_1=\Delta x_1,\ x_3-x_2=\Delta x_2,\ \ldots\ \ldots,\ x_n-x_{n-1}=\Delta x_{n-1}$ и рассмотрим сумму

$$f(x_0)\,\Delta x_0+f(x_1)\,\Delta x_1+f(x_2)\,\Delta x_2+\ldots+f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \qquad (1)$$

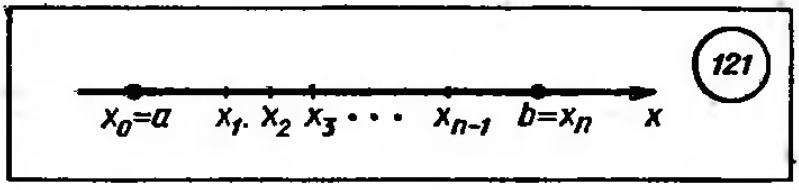
Она называется *интегральной суммой для функции $y=f(x)$ по отрезку $[a;\ b]$*.

Наряду с интегральной суммой (1) рассматривают и интегральную сумму вида

$$f(x_1)\,\Delta x_0+f(x_2)\,\Delta x_1+\ldots+f(x_n)\,\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

Отличие суммы (1) от суммы (2) состоит в том, что в первом случае на каждом из отрезков $[x_0;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\ x_n]$ выбирается значение функции в левом конце отрезка, а во втором случае — в правом.

На практике удобнее делить отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей. Тогда $\Delta x_0=\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_{n-1}=\frac{b-a}{n}$ и сумма (1) принимает вид $\frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1}))$. Зна-



чение суммы зависит только от числа n, поэтому эту сумму можно обозначить Σ_n (Σ — греческая буква «сигма»).

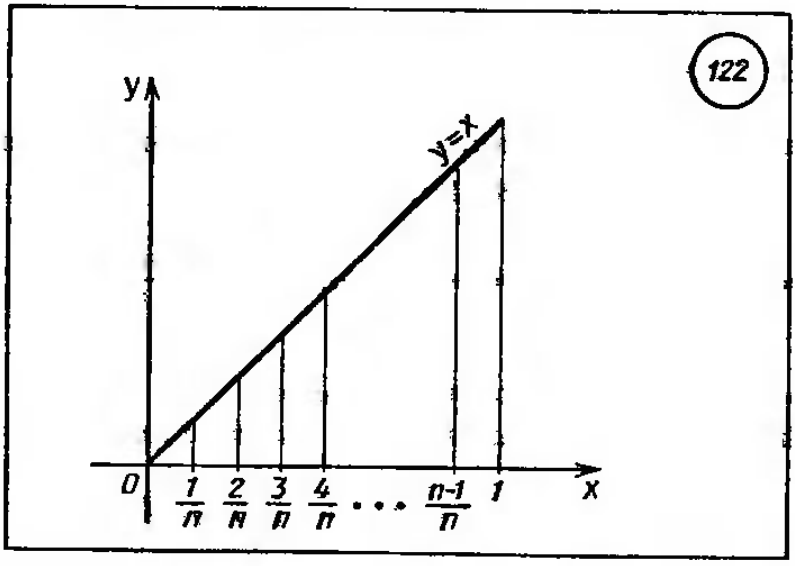
Рассмотрим последовательность интегральных сумм Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n. В математике установлено, что для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y=f(x)$ эта последовательность сходится (см. п. 200). Ее предел называют *интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до* b и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

Итак, $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma_n$. Числа a и b называют соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, знак $\int$ — *знаком интеграла*, функцию $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Пример. Найти $\int_0^1 x\,dx$.

Решение. Составим интегральную сумму Σ_n для функции $f(x)=x$ на отрезке $[0; 1]$. Для этого разобьем отрезок $[0; 1]$ на n равных частей точками $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$ (рис. 122). Имеем $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$, $f\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}$, $f\left(\frac{3}{n}\right)=\frac{3}{n}$, ..., $f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}$. Интегральная сумма Σ_n имеет вид:

$$\Sigma_n=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}.$$



В числителе содержится сумма первых $(n-1)$ членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а $(n-1)$-й равен $n-1$. Тогда сумма S_{n-1} вычисляется по формуле (см. п. 197).

$$S_{n-1}=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

В итоге получаем $\Sigma_n=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

Далее имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$. Значит, $\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

228. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона—Лейбница). Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \qquad (1)$$

(формула Ньютона—Лейбница). На практике в формуле (1) удобно вместо $F(b)-F(a)$ писать $F(x)\Big|_a^b$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 x^7dx$.

Решение. Для функции $f(x)=x^7$ первообразной является $F(x)=\frac{x^8}{8}$. Значит, $\int\limits_0^1 x^7dx=\frac{x^8}{8}\Big|_0^1=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^2\frac{dx}{2x+3}$.

Решение. Для функции $f(x)=\frac{1}{2x+3}$ первообразной является $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+3|$. Значит,

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{2x+3}=\frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}.$$

229. Правила вычисления интегралов.

1°. *Интеграл суммы равен сумме интегралов.*

$$\int\limits_a^b(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int\limits_a^b f_1(x)\,dx+\int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

2^0. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)\,dx$.

Решение. Воспользовавшись правилами 1^0 и 2^0, получим:

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)\,dx = \int_{-2}^{1}2x^3dx+\int_{-2}^{1}3xdx+\int_{-2}^{1}-4dx =$$

$$=2\int_{-2}^{1}x^3dx+3\int_{-2}^{1}xdx-\int_{-2}^{1}4dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1}+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-4x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-4\right)+\frac{8}{2}(1-4)-4(1+2) = -24.$$

Пример 2. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы функций, первообразные от которых можно найти по таблице (см. п. 225).

Имеем:

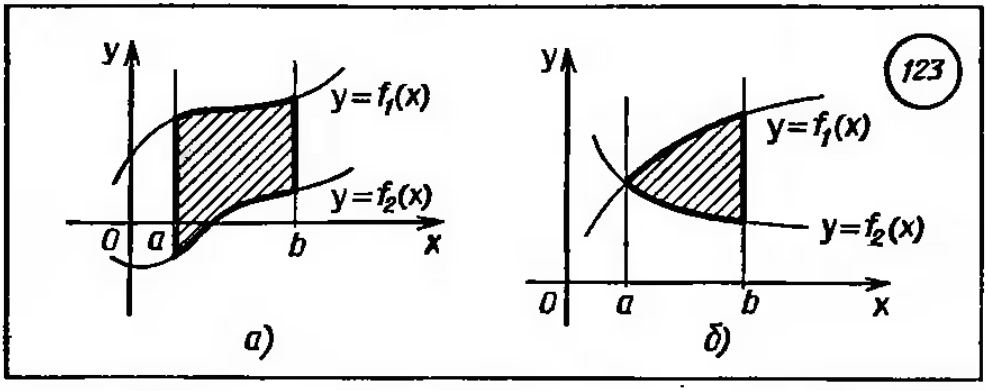
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}-1.$$

Значит, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}dx =$

$$=\operatorname{tg} x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{\pi}{12} =$$

$$=\frac{4(3-\sqrt{3})-\pi}{12}.$$

230. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур. Рассмотрим плоскую фигуру Φ, представляющую собой множество точек координатной плоскости xy, лежащее в полосе между прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, имеющее в своем составе точки с абсциссами $x=a$, $x=b$ и ограниченное сверху и снизу графиками непрерывных на $[a;\ b]$ функций



$y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, таких, что для всех x из $[a; b]$ справедливо неравенство $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Примеры таких фигур представлены на рисунках 123—127. В частности, фигура, изображенная на рисунке 124, *а*, ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, а снизу — прямой $y=0$. Такая фигура называется *криволинейной трапецией*.

Площадь S фигуры Φ вычисляется по формуле

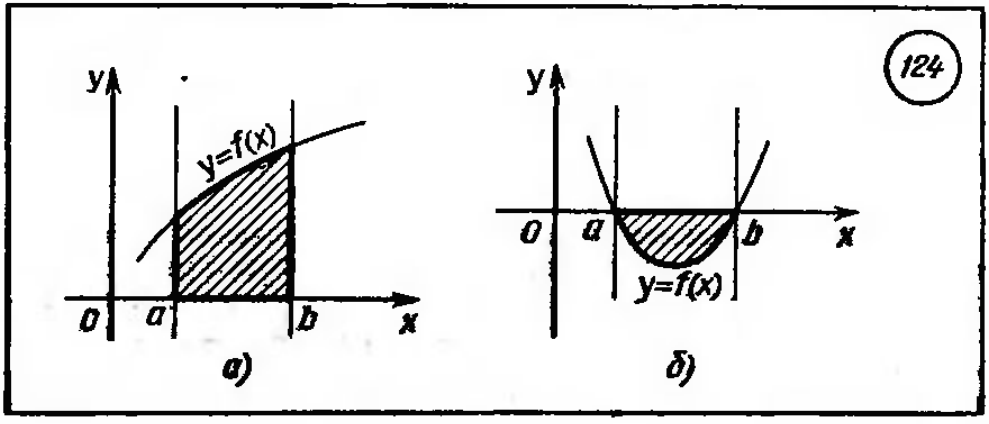
$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,dx. \qquad (1)$$

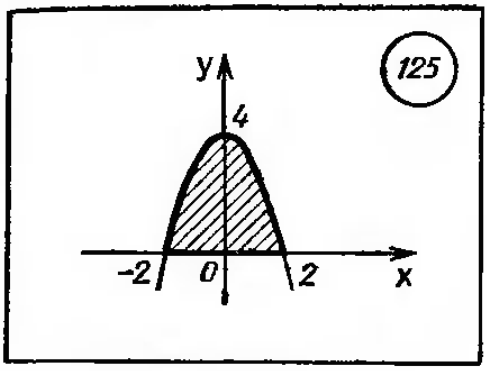
В частности, для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 124, *а*, получаем:

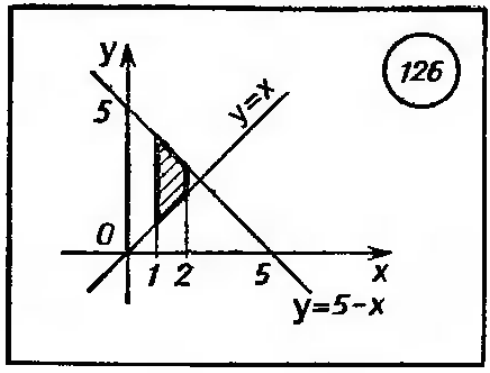
$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2)$$

а для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 124, *б*, получаем:

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$







Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 125. Воспользовавшись формулой (2), получим:

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\int_{-2}^{2}4dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=4x\Big|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=4(2+2)-\frac{1}{3}(8+8)=\frac{32}{3}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=5-x$, $x=1$, $x=2$.

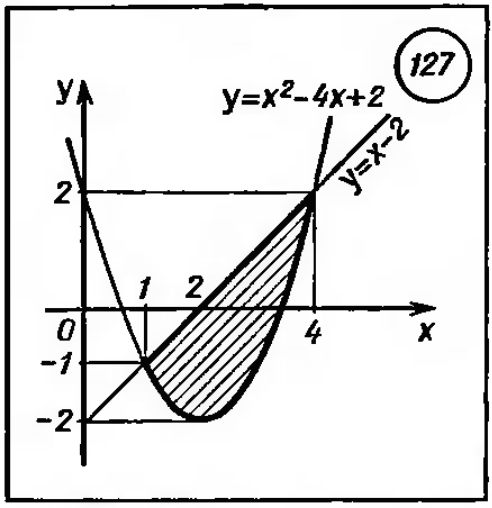
Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 126. По формуле (1) получим:

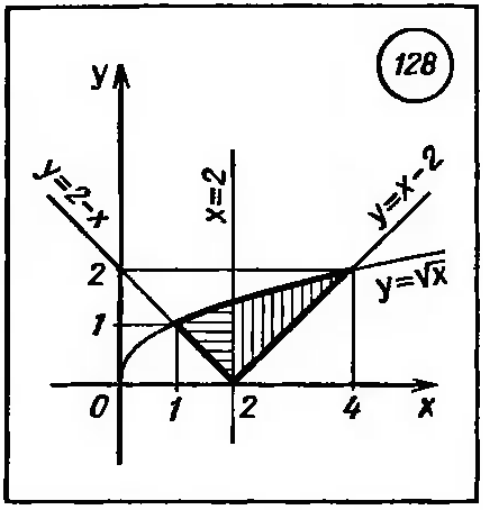
$$S=\int_{1}^{2}((5-x)-x)\,dx=\int_{1}^{2}(5-2x)\,dx=\int_{1}^{2}5dx-2\int_{1}^{2}xdx=5x\Big|_{1}^{2}-$$

$$-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}=5(2-1)-(4-1)=2.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$, $y=x^2-4x+2$.

Решение. Построив прямую $y=x-2$ и параболу $y=x^2-4x+2$ (см. п. 114), получим фигуру, площадь которой требуется вычислить (рис. 127). Значит, $S=\int_{a}^{b}(f_1(x)-f_2(x))\,dx$, где $f_1(x)=x-2$, $f_2(x)=x^2-4x+2$, а пределы интегрирования a и b суть абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для отыскания этих абсцисс решим уравнение $f_1(x)=f_2(x)$, т. е. $x-2=x^2-4x+2$, откуда $x_1=1$, $x_2=4$.





$$S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))\,dx=\int_1^4(5x-x^2-4)\,dx=$$

$$=5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4=\frac{5}{2}(16-1)-\frac{1}{8}(64-1)-4(4-1)=4{,}5.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 128 (см. п. 158). Проведем прямую $x=2$. Тогда площадь S интересующей нас фигуры равна сумме S_1+S_2, где S_1 — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 128 горизонтальной штриховкой, а S_2 — площадь фигуры, заштрихованной на рнсунке 128 вертикальной штриховкой.

Имеем $S_1=\int_1^2(\sqrt{x}-(2-x))\,dx=\int_1^2(x^{\frac{1}{2}}+x-2)\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+$

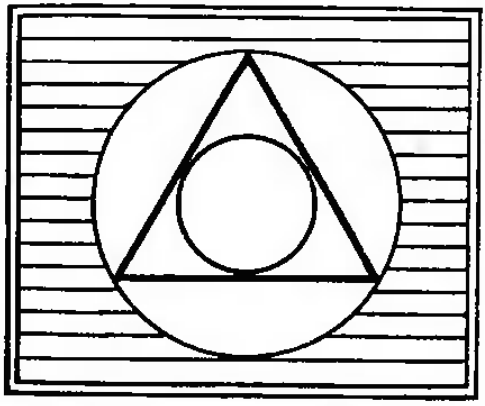
$$+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2x\Big|_1^2=\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)+\frac{1}{2}(4-1)-2(2-1)=\frac{3\sqrt{2}-7}{6};$$

$$S_2=\int_2^4(\sqrt{x}-(x-2))\,dx=\int_2^4(x^{\frac{1}{2}}-x+2)\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_2^4-\frac{x^2}{2}\Big|_2^4+$$

$$+2x\Big|_2^4=\frac{2}{3}(8-\sqrt{8})-\frac{1}{2}(16-4)+2(4-2)=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, $S=S_1+S_2=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}+\frac{10-4\sqrt{2}}{3}=\frac{13}{6}$.

ГЕОМЕТРИЯ



ГЛАВА I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. О строении курса геометрии

1. Геометрические фигуры . . 255
2. Точка. Прямая. 256
3. Определения. Аксиомы. Теоремы 257

§ 2. Основные свойства простейших геометрических фигур

4. Отрезок 259
5. Луч 261
6. Окружность. Круг 262
7. Полуплоскость 263
8. Угол. Градусная мера угла. . —
9. Смежные и вертикальные углы 266
10. Центральные и вписанные углы 267
11. Параллельные прямые. . 268
12. Признаки параллельности прямых 271
13. Перпендикулярные прямые 272
14. Касательная к окружности. Касание окружностей . . . 274
15. Треугольники 275
16. Равенство треугольников . 277
17. Равнобедренный треугольник 278
16. Сумма углов треугольника 279
19. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. 280
20. Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника 282

§ 3. Геометрические построения на плоскости

21. Чертежные инструменты. 284
22. Простейшие задачи на построение 285
23. Геометрическое место точек на плоскости 288

§ 4. Четырехугольники

24. Выпуклые четырехугольники 290
25. Параллелограмм 291
26. Прямоугольник. Ромб. Квадрат 293
27. Трапеция 294

§ 5. Многоугольники

28. Ломаная 296
29. Выпуклые многоугольники 297
30. Правильные многоугольники 298
31. Длина окружности . . . 300

§ 6. Решение треугольников

32. Косинус, синус и тангенс. . 302
33. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 304
34. Теорема косинусов. Теорема синусов 305
35. Решение треугольников. . 307

§ 7. Площади плоских фигур

36. Понятие площади простых фигур 308
37. Площади многоугольников 309
38. Площади подобных фигур 311
39. Площадь круга 312

ГЛАВА II. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 3. Аксиомы стереометрии и некоторые следствия из них
40. Основные понятия стереометрии 314

§ 9. Параллельность прямых и плоскостей
41. Скрещивающиеся прямые 317
42. Параллельность прямой и плоскости 318
43. Параллельные плоскости 319

§ 10. Перпендикулярность прямых и плоскостей
44. Перпендикулярность прямой и плоскости 321
45. Перпендикуляр и наклонная к плоскости 323
46. Перпендикулярность плоскостей 325

ГЛАВА III. ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 11. Многогранники
47. Тело и его поверхность. . 326
48. Многогранные углы. Многогранники 327
49. Призма. Параллелепипед. Куб. 328
50. Пирамида 331
51. Правильные многогранники 333

§ 13. Тела вращения
53. Цилиндр 333
53. Конус 336
54. Шар 337

§ 13. Изображение пространственных фигур на плоскости
55. Параллельная проекция. . 340
56. Ортогональное проектирование 341
57. Геометрическое место точек в пространстве 342

§ 14. Объемы тел
58. Понятие объема простых тел 344
59. Объем параллелепипеда, призмы и пирамиды . . . 345
60. Объем цилиндра и конуса 346
61. Общая формула объемов тел вращения. Объем шара и его частей 347

§ 15. Площади поверхностей тел
63. Площади поверхностей многогранников 348
68. Понятие площади поверхности 349
64. Площади поверхностей тел вращения 350

ГЛАВА IV. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

§ 19. Координаты на плоскости и в пространстве
65. Введение координат на плоскости и в пространстве. . . 351
66. Координаты середины отрезка. Расстояние между точками 353

§ 17. Уравнения фигур на плоскости
67. Уравнение окружности. . 355
63. Пересечение двух окружностей 356
69. Уравнение прямой . . . 357
70. Пересечение прямой и окружности 359

§ 13. Уравнения фигур в пространстве
71. Уравнение плоскости. . . 360
72. Уравнение сферы 361
73. Взаимное расположение сферы и плоскости. 362
74. Пересечение двух сфер. . 363

ГЛАВА V. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

§ 19. Движение
75. Примеры преобразований фигур 364
76. Понятие движения. Свойства движений 369

§ 20. Подобие фигур
77. Преобразование подобия. . 374
78. Подобные фигуры. . . . 375

ГЛАВА VI. ВЕКТОРЫ

§ 21. Введение понятия вектора
79. Параллельный перенос. . 377
80. Понятие вектора. . . . 378
81. Координаты вектора. . . 380

§ 22. Операции над векторами
82. Сумма векторов 380
83. Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. . . 382
84. Скалярное произведение векторов 384

ГЛАВА I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. О строении курса геометрии

1. Геометрические фигуры. *Геометрия* — это наука о свойствах *геометрических фигур*: треугольника, квадрата, круга, пирамиды, сферы и др.

Слово «геометрия» греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие».

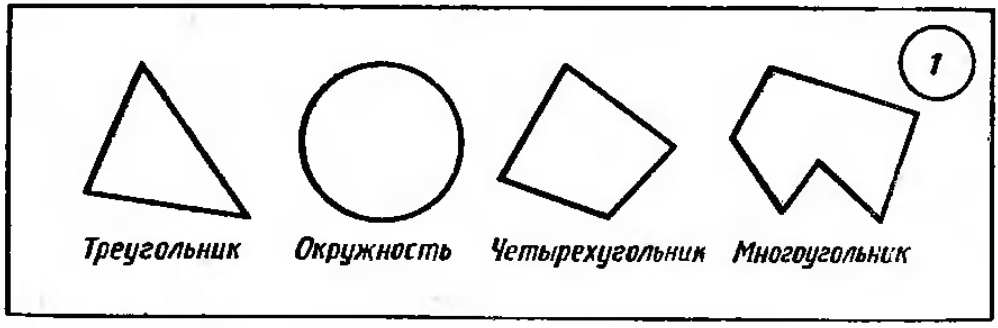
Геометрия, которая изучается в школе, называется *евклидовой* по имени древнегреческого ученого Евклида, жившего в III в. до н. э.

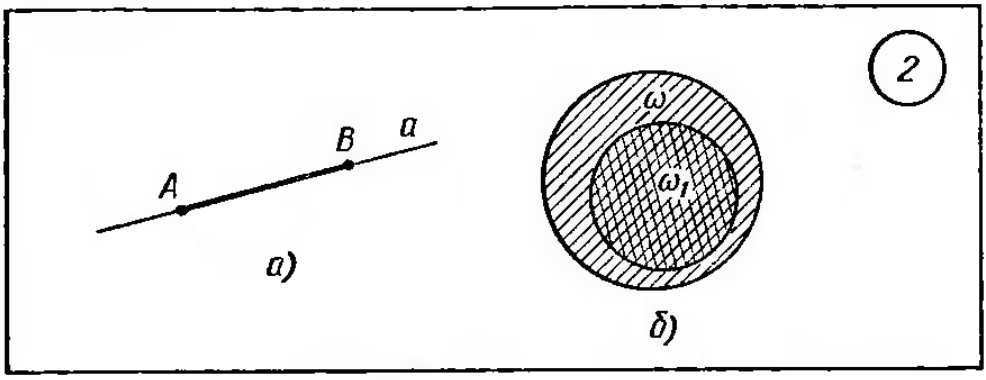
Школьная геометрия состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. С первой частью геометрии вы знакомитесь в восьмилетней школе, со второй — в старших классах. *Планиметрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются геометрические фигуры на плоскости. *Стереометрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве (см. главу II).

На рисунке 1 изображены различные фигуры на плоскости. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек. Часть любой геометрической фигуры также является геометрической фигурой. На рисунке 2, *а* отрезок AB есть часть прямой a, и на рисунке 2, *б* круг ω_1 есть часть круга ω.

Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рисунке 3 фигура составлена из треугольника и трех квадратов, на рисунке 4 фигура состоит из трех кругов.

В этой главе мы будем рассматривать только фигуры на плоскости.





2. Точка. Прямая. *Основными геометрическими фигурами на плоскости* являются *точка* и *прямая.*

Точки обозначаются прописными (заглавными) латинскими буквами:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots\ .$$

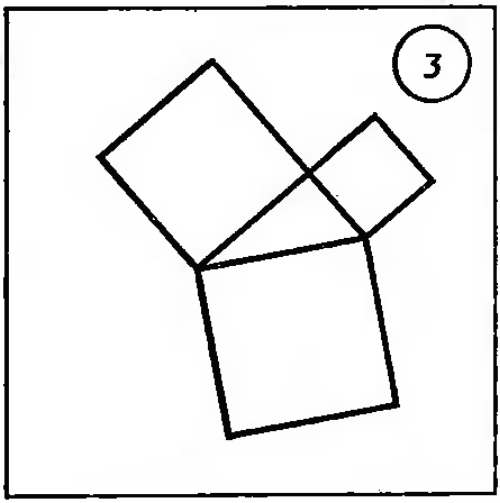
Прямые обозначаются строчными латинскими буквами:

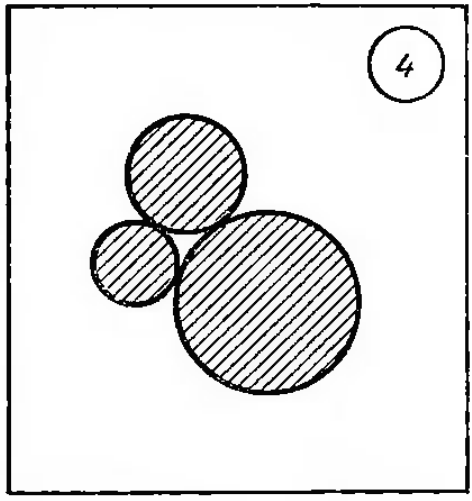
$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ .$$

Прямую можно обозначить также двумя буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней. Например, прямую a на рисунке 5 можно обозначить AB, а прямую b обозначить MK.

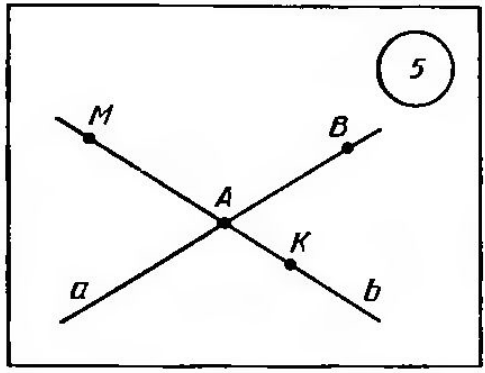
На рисунке 5 изображены прямые a и b и точки A, B, M и K. Про точки M и K говорят, что они *лежат на прямой* b или что точки M и K *принадлежат прямой* b. Аналогично точки A и B лежат на прямой a или принадлежат прямой a.

Про прямую иногда говорят, что она *проходит через точки.*





Так, прямая a на рисунке 5 проходит через точки A и B, а прямая b проходит через точки M, K и A. Можно также сказать, что прямая a *не проходит через точку* M или что точка K *не принадлежит прямой* a.



3. Определения. Аксиомы. Теоремы. В последующих пунктах будут даны определения многих геометрических фигур и других понятий. Дать *определение* чему-либо — значит объяснить, что это такое. При определении любого понятия употребляются другие понятия, которые должны быть уже известны. Однако нельзя дать определения всех понятий, поэтому некоторые из них принимают без определений и называют их неопределяемыми. К таким понятиям относятся, например, точка и прямая (см. п. 2).

На рисунке 5 прямые a и b имеют одну общую точку A. Прямые, имеющие одну общую точку, называются *пересекающимися*, а точка A — *точкой пересечения* прямых a и b.

Рассуждение, с помощью которого устанавливается правильность утверждения о свойстве геометрической фигуры, называется *доказательством*.

Предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, истинность которого доказывается, называется *теоремой*.

Совершенно ясно, что невозможно доказать все свойства геометрических фигур, не приняв некоторые из них за основные, являющиеся отправными в доказательствах других свойств фигур.

Принимаемые без доказательства свойства фигур называют *аксиомами*.

По ходу изложения материала будут сформулированы аксиомы, на основе которых построен школьный курс планиметрии. Эти аксиомы обозначены буквой А.

В главе II будет рассмотрена группа аксиом стереометрии.

К аксиомам планиметрии относятся, например, основные *свойства принадлежности точек и прямых на плоскости*.

А—I_1.	Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
А—I_2.	Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Используя уже имеющиеся определения и аксиомы, можно доказать первую теорему планиметрии.

Т. 1. 1. | **Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.**

Если бы две различные прямые имели две точки пересечения, то получилось бы, что через эти точки проходят две различные прямые. А это невозможно, так как согласно $A—I_2$ через две точки проходит только одна прямая.

Эта теорема доказывается *методом доказательства от противного*. Этот метод состоит в том, что сначала делается предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы, а нередко на доказанные ранее теоремы, приходят к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо известной ранее теореме. На этом основании заключают, что предположенне было неверным, а значит, верно утвержденне теоремы.

Строение курса геометрии можно охарактеризовать так:

1. Перечисляются основные геометрические понятия, они вводятся без определения.

2. На основе введенных понятий даются определения всем остальным геометрическим понятиям.

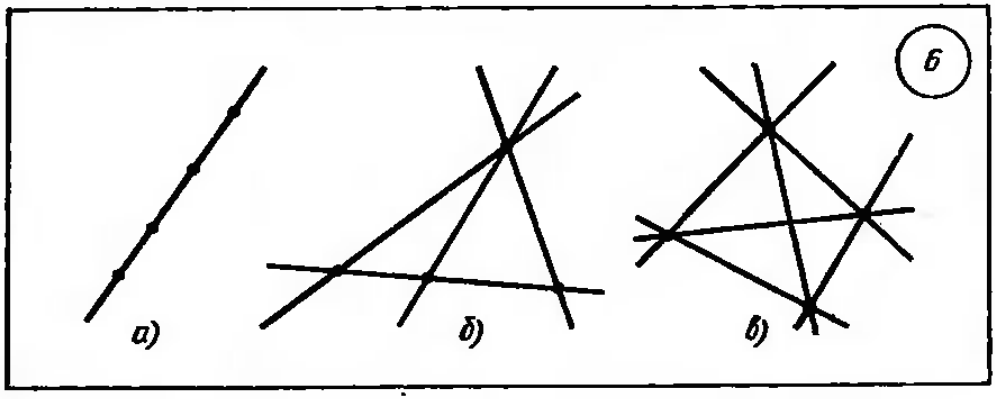
3. Формулнруются аксиомы.

4. На основе аксиом и определений доказываются теоремы, которые, в свою очередь, используются для доказательства других теорем курса геометрии.

Построенне геометрии с учетом выполнеиия всех этих пунктов называется аксиоматическим.

Пример. Даны четыре точки. Сколько различных прямых могут определять эти точки?

Решение. Воспользуемся аксиомой геометрии $A—I_2$. Существенным здесь является рассмотрение различных возмож-



ностей расположения точек. Принципиально различными являются три случая расположения четырех точек (рис. 6). В первом случае (рис. 6, *а*) мы имеем одну прямую, во втором случае (рис. 6, *б*) — четыре прямые, в третьем случае (рис. 6, *в*) — шесть прямых.

§ 2. Основные свойства простейших геометрических фигур

4. Отрезок. На прямой a (рис. 7, *а*) взяты точки A, B и C. Точка B *лежит между* точками A и C. Можно также сказать, что точки A и C *лежат по разные стороны* от точки B. Точки A и B *лежат по одну сторону* от точки C, они *не разделяются точкой* C. Точки B и C лежат по одну сторону от точки A.

Отрезком называется часть прямой, которая состонт из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются *концами отрезка*. Отрезок обозначается указанием его концов.

На рисунке 7, *б* отрезок AB является частью прямой a. Точка M лежит между точками A и B, а поэтому принадлежит отрезку AB; точка K не лежит между точками A и B, поэтому не принадлежит отрезку AB.

Аксиома (основное свойство) *расположения точек на прямой* формулируется так:

А—II$_1$. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Следующая аксиома выражает *основное свойство измерения отрезков*.

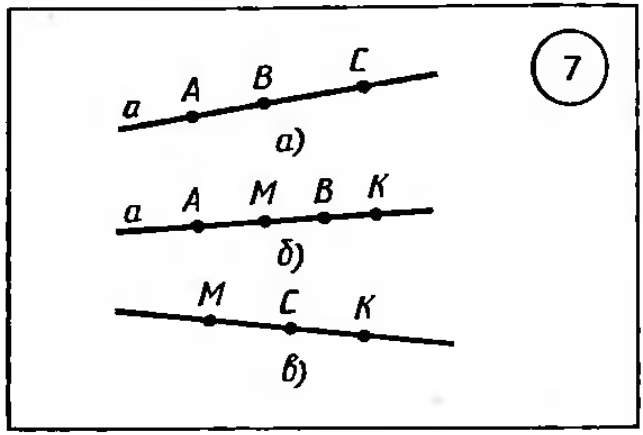
А—III$_1$. Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Это значит, что если на отрезке MK взять любую точку C, то длина отрезка MK равна сумме длин отрезков MC и CK (рис. 7, *в*).

Длину отрезка MK называют также *расстоянием между точками* M и K.

Пример 1. На прямой даны три точки O, P и M. Известно, что $OM=14$ см, $OP=8$ см, $PM=6$ см. Лежит ли точка P между O и M? Может ли точка B принадлежать отрезку PM, если $BM=5$ см, $PB=4$ см? Объяснить ответ.

Решение. Точка P лежит между точками O и M, если $OP+PM=OM$. Проверим выполнение этого условия: 8 см + 6 см = 14 см. Вывод: точка P лежит между точками O и M.



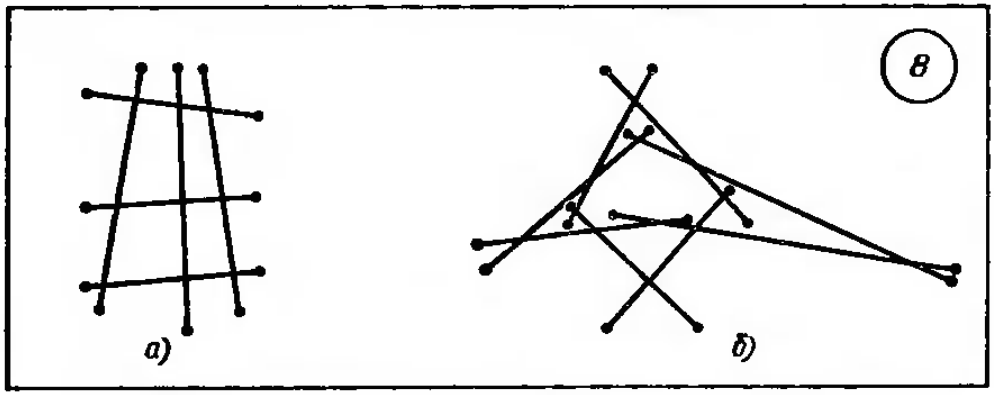
Точка B принадлежит отрезку PM, если она лежит между точками P и M, т. е. $PB+BM=PM$. Проверим: 4 см + 5 см = = 9 см, а по условию $PM=6$ см. Вывод: точка B не принадлежит отрезку PM.

Пример 2. Можно ли на плоскости расположить 6, 7 и 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

Решение. 6 отрезков расположить так можно (рис. 8, *а*). 8 отрезков так расположить тоже можно (рис. 8, *б*). 7 отрезков так расположить нельзя.

Докажем последнее утверждение. Предположим, что такое расположение семи отрезков возможно. Занумеруем отрезки и составим такую таблицу 7×7: в клетке $(i; j)$ на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим «+», если i-й отрезок пересекается с j-м, и «—», если не пересекается. Если $i=j$, то тоже ставим «—». Подсчитаем двумя способами, сколько знаков «+» в таблице.

С одной стороны, в каждой строке их 3, поэтому всего знаков «+» $3\cdot7=21$. С другой стороны, таблица заполнена симметрично относительно диагонали:



если в клетке $(i; j)$ стоит «+», то в клетке $(j; i)$ тоже. Значит, общее количество знаков «+» должно быть четным. Получили противоречие.

Здесь мы воспользовались доказательством методом от противного.

5. Луч. *Полупрямой* или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эта точка иазывается *начальной точкой полупрямой* или *началом луча*. Различные полупрямые одной и той же прямой с общей начальной точкой называются *дополнительными*.

Полупрямые обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначить полупрямую двумя буквами: начальной и еще какой-нибудь буквой, соответствующей точке, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, на рисунке 9, *а* изображены лучи AB и AC, являющиеся дополнительными, на рисунке 9, *б* изображены лучи MA, MB и луч c.

Следующая аксиома отражает *основное свойство откладывания отрезков*:

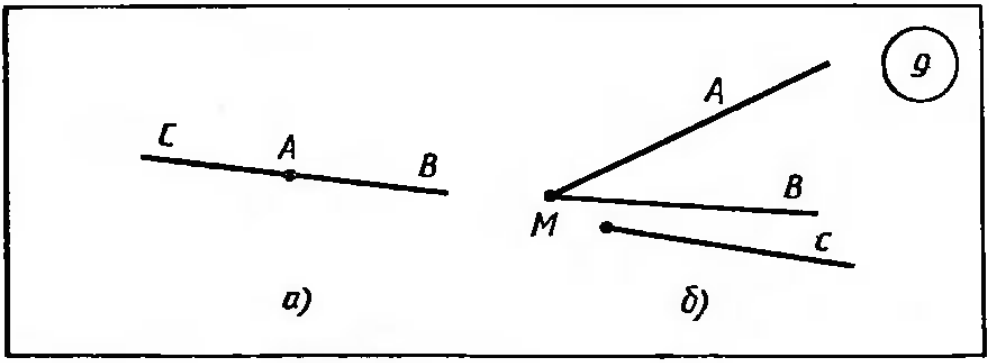
$A—IV_1$. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

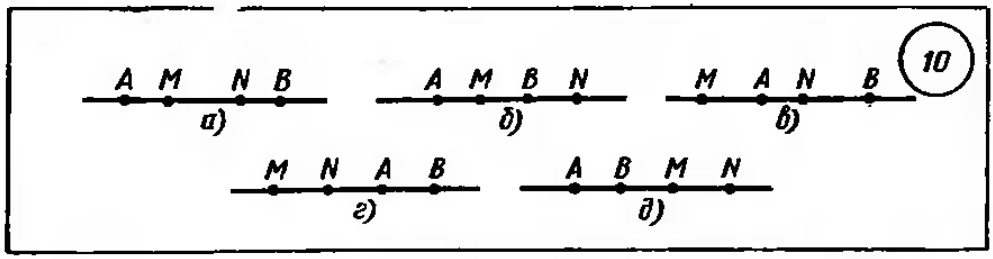
Пример. Даны две точки A и B. Сколько прямых можно провести через точки A и B? Сколько существует на прямой AB лучей с началом в точке A, в точке B? Отметить на прямой AB две точки, отличные от A и B. Принадлежат ли онн отрезку AB?

Решение. 1) По аксиоме $A—I_2$ через точки A и B всегда можно провести прямую, и только одну.

2) На прямой AB с иачалом в точке A существуют два луча, которые называются дополнительиыми. Аиалогично и для точки B.

3) Ответ зависит от расположения отмеченных точек. Рассмотрим возможные случаи (рис. 10). Ясно, что в случае а) точки M и N принадлежат отрезку AB; в случаях б), в) одиа точка





принадлежит отрезку, а другая иет; в случаях г) и д) точки M и N не принадлежат отрезку AB.

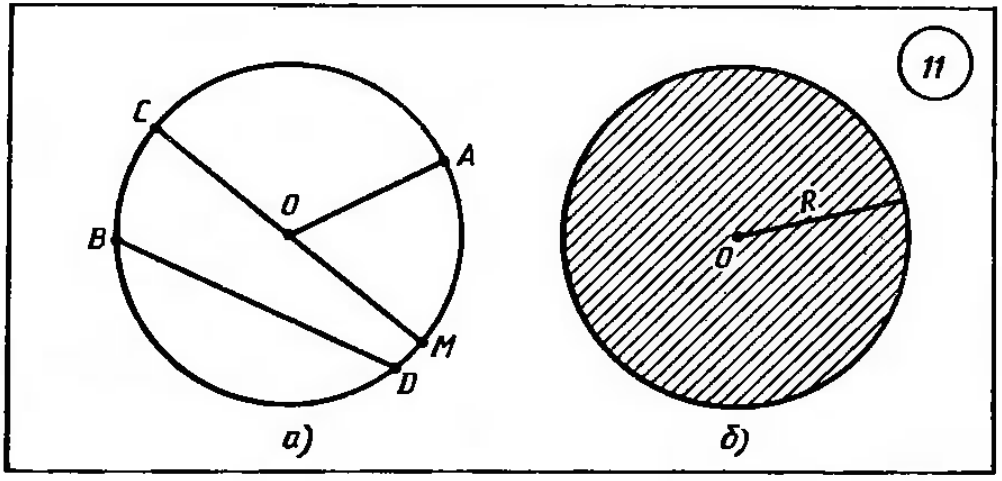
6. Окружность. Круг. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности.

Расстоянне от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.

Отрезок, соединяющий две точки окружиости, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*.

На рисунке 11, *а* изображена окружность с центром в точке O. Отрезок OA — радиус этой окружности, BD — хорда окружности, CM — диаметр окружности.

Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется центром круга, а данное расстояние — *радиусом* круга. *Границей* круга является окружность с теми же центром и радиусом (рис. 11, *б*).



Пример. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбивать плоскость: а) прямая и окружность; б) две окружности; в) три окружности?

Решение. Изобразим на рисунке соответствующие условию случаи взаимного расположения фигур. Запишем **ответ**: а) четыре части (рис. 12, *а*); б) четыре части (рис. 12, *б*); в) восемь частей (рис. 12, *в*).

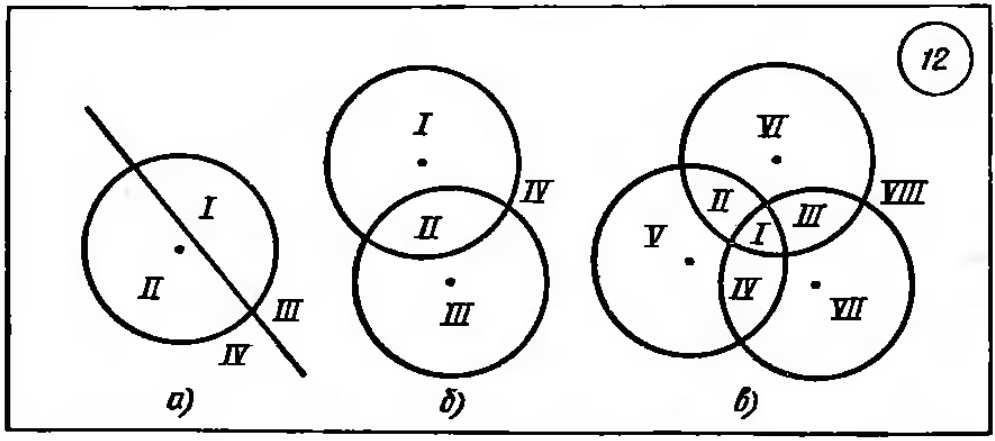
7. Полуплоскость. Сформулируем еще одну аксиому геометрии.

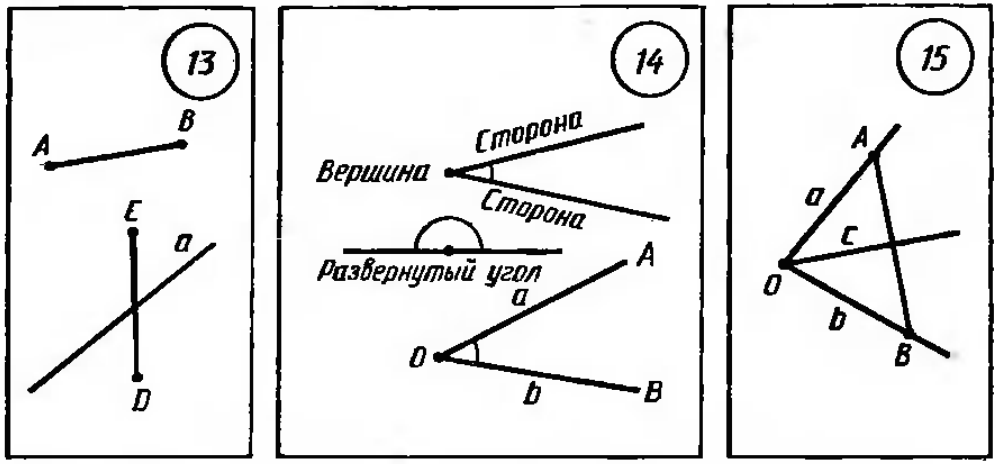
А—II$_2$. | **Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.**

На рисунке 13 прямая *а разбивает* плоскость на две *полуплоскости* так, что каждая точка плоскости, не принадлежащая прямой *а*, лежит в одной из них. Это разбиение обладает следующим свойством: если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой; если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой. На рисунке 13 точки *A* и *B* лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая *а* разбивает плоскость. Поэтому отрезок *AB* не пересекается с прямой *а*. Точки *C* и *D* лежат в разных полуплоскостях. Поэтому отрезок *CD* пересекает прямую *а*.

8. Угол. Градусная мера угла. *Углом* называется фигура, которая состоит из точки — *вершины угла* и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки, — *сторон угла* (рис. 14). Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми, то угол называется *развернутым*.

Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла. Слово «угол» иногда заменяют сим-





волом $\angle$. Угол на рисунке 14 можно обозначить тремя способами:

$$\angle O,\ \angle(ab),\ \angle AOB.$$

Говорят, что луч c *проходит между* сторонами угла (ab), если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

На рисунке 15 луч c проходит между сторонами угла (ab), так как он пересекает отрезок AB.

В случае развернутого угла любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Углы измеряются в градусах. Если взять развернутый угол и разделить его на 180 равных углов, то градусная мера каждого из этих углов называется *градусом*.

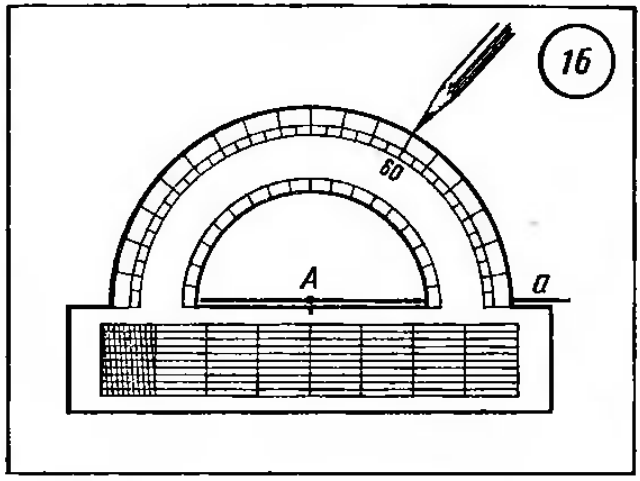
Основные свойства измерения углов выражены в следующей аксиоме:

А—III$_2$. Каждый угол имеет определенную градусную меру, бóльшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Это значит, что если луч c проходит между сторонами угла (ab), то угол (ab) равен сумме углов (ac) и (cb), т. е. $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$.

Градусная мера угла находится при помощи *транспортира*.

Угол, равный 90°, называется *прямым* углом. Угол, меньший 90°, называется *острым* углом. Угол, больший 90° и меньший 180°, называется *тупым*.



Сформулируем *основное свойство откладывания углов.*

A—IV$_2$. | От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

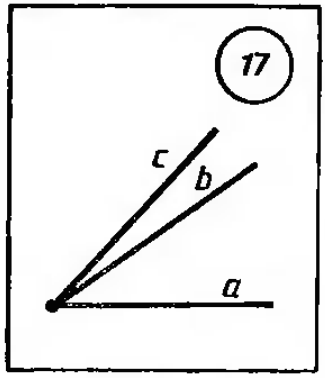
Рассмотрим полупрямую a. Продлим ее за начальную точку A. Полученная прямая разбивает плоскость на две *полуплоскости.* На рисунке 16 показано, как с помощью транспортира отложить от полупрямой a в верхнюю полуплоскость угол с данной градусной мерой 60°.

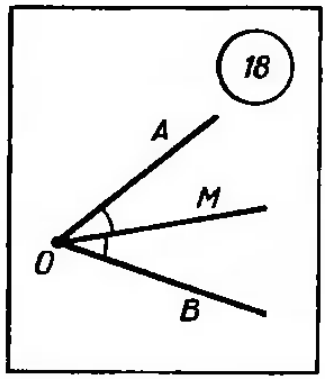
Т. 1. 2. | Если от данной полупрямой отложить в одну полуплоскость два угла, то сторона меньшего угла, отличная от данной полупрямой, проходит между сторонами большего угла.

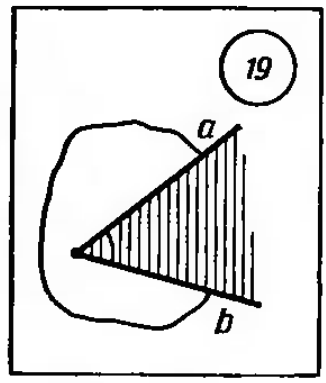
Пусть $\angle(ab)$ и $\angle(ac)$ — углы, отложенные от данной полупрямой a в одну полуплоскость, и пусть угол (ab) меньше угла (ac). В теореме 1. 2 утверждается, что луч b проходит между сторонами угла (ac) (рис. 17).

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам. На рисунке 18 луч OM — биссектриса угла AOB.

В геометрии существует понятие плоского угла. *Плоским углом* называется часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки. Эти лучи называются *сторонами угла.* Существуют два плоских угла с данными сторонами. Они называются *дополнительными.* На рисунке 19 заштрихован один из плоских углов со сторонами a и b.







Если плоский угол является частью полуплоскости, то его градусной мерой является градусная мера обычного угла с теми же сторонами. Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера равна $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла.

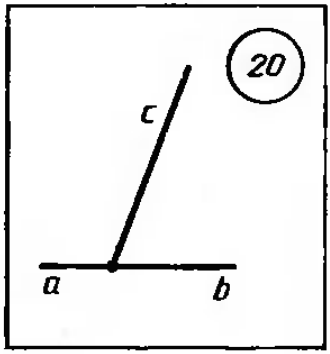
Пример. Между сторонами угла (cd), равного $120°$, проходит луч a. Найти углы (ca) и (da), если их градусные меры относятся как $4:2$.

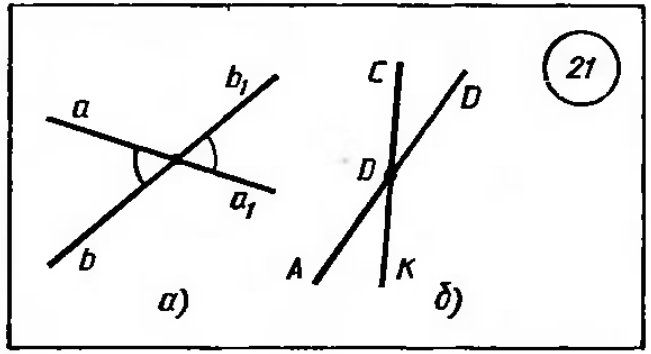
Решение. Луч a проходит между сторонами угла (cd), значит, по основному свойству измерения углов (см. п. 8)

$$\angle(ca) + \angle(ad) = \angle(cd).$$

Так как градусные меры $\angle(ca)$ и $\angle(da)$ относятся как $4:2$, то $\angle(ca) = \frac{120°}{6} \cdot 4 = 80°$, $\angle(da) = \frac{120°}{6} \cdot 2 = 40°$.

9. Смежные и вертикальные углы. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рисунке 20 углы (ac) и (cb) смежные.





Т. 1. 3. | **Сумма смежных углов равна 180°.**

Из теоремы 1. 3 следуют свойства:

1) если два угла равны, то смежные с ними углы равны;

2) угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол;

3) угол, смежный с острым, является тупым, а смежный с тупым — острым.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рисунке 21, *а* углы (ab) и (a_1b_1) вертикальные.

Т. 1. 4. | **Вертикальные углы равны.**

Очевидно, что две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*.

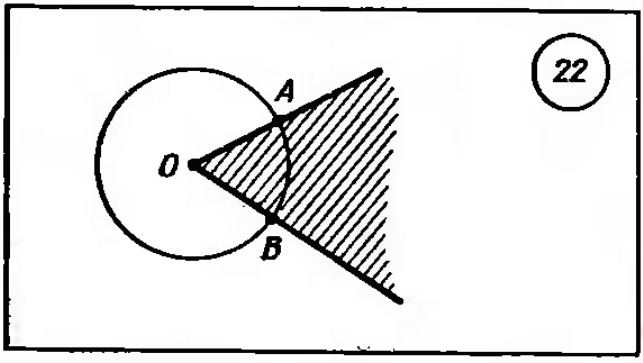
Пример. На рисунке 21, *б* угол COD равен 30°. Чему равны углы AOK и DOK?

Решение. Углы COD и AOK вертикальные, следовательно, по теореме 1.4 они равны, т. е. $\angle AOK = 30°$. Угол DOK смежный с углом COD, значит, по теореме 1.3

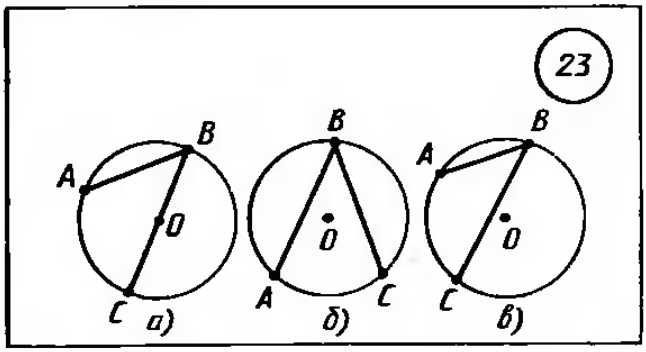
$$\angle DOK = 180° - \angle COD = 180° - 30° = 150°.$$

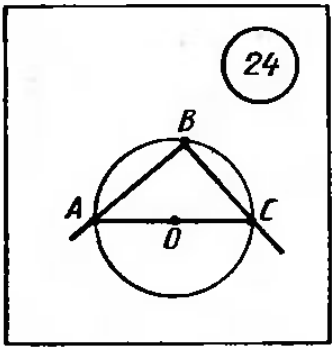
10. Центральные и вписанные углы. *Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу. *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

На рисунке 22 угол AOB — центральный угол окружности, его вершина O является центром данной окружности, а стороны OA и OB пересекают окружность. Дуга AB является частью окружности, расположенной внутри центрального угла.



22





Градусная мера дуги AB на рисунке 22 равна градусной мере угла AOB. Градусная мера дуги AB обозначается $\smile AB$.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность. На рисунке 23 изображены вписанные углы.

Т. 1.5. Вписанный в окружность угол, стороны которого проходят через две данные точки окружности, равен половине угла между радиусами, проведенными в эти точки, или дополняет эту половину до 180°.

При доказательстве теоремы 1. 5 необходимо рассмотреть три разных случая, которые изображены на рисунке 23: одна из сторон вписанного угла проходит через центр окружности (рис. 23, *а*); центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 23, *б*); центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 23, *в*).

Из теоремы 1. 5 вытекает следствие: все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны; вписанные углы, стороны которых проходят через концы диаметра окружности, прямые.

На рисунке 24 стороны вписанного угла ABC проходят через концы диаметра AC, поэтому $\angle ABC = 90°$.

Пример. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Найти угол AOC, если $\angle ABC = 66°$.

Решение. Угол ABC, вписанный в окружность, опирается на дугу AC, а $\angle AOC$ — центральный угол данной окружности (рис. 25). $\angle ABC = 66°$, значит, $\smile AC = 132°$ по теореме 1. 5, а так как угол AOC центральный, то его градусная мера равна градусной мере дуги AC, т. е. $\angle AOC = 132°$.

11. Параллельные прямые. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

На рисунке 26 показаио, как с помощью угольника и линейки провести через данную точку B прямую b, параллельиую данной прямой a.

Для обозиачения параллельности прямых используется символ $\parallel$. Запись $a \parallel b$ читается: «Прямая a параллельна прямой b».

Аксиома параллельиости выражает *основное свойство параллельных прямых.*

А—V. Через точку, ие лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одиой прямой, параллельной данной.

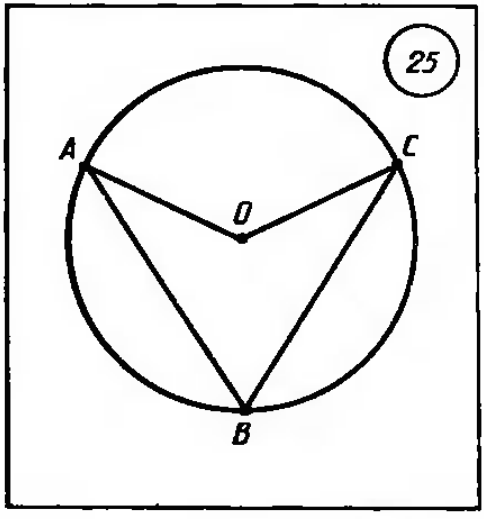
Т. 1. 6. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.

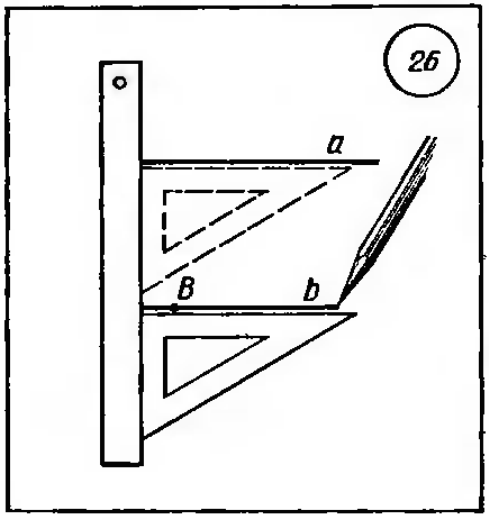
На рисунке 27 прямые a и b параллельны прямой c. Теорема 1. 6 утверждает, что $a \parallel b$.

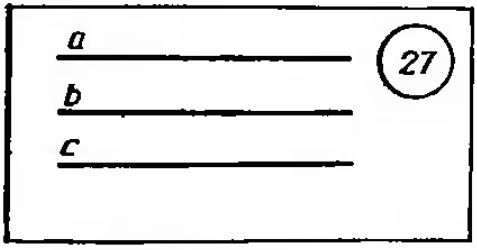
Можно доказать, что через точку, не принадлежащую прямой, можно провести прямую, параллельную данной. На рисунке 28 через точку A, не принадлежащую b, проведена прямая a, параллельная прямой b.

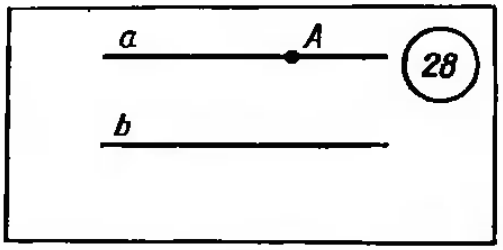
Сопоставляя это утверждение и аксиому параллельных, приходят к важному выводу: на плоскости через точку, ие лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одиу.

Аксиома параллельности в книге Евклида «Начала» называлась «пятый постулат». Геометры древности пытались доказать едииственность параллельной. Эти безрезультатные попытки продолжались более 2000 лет, вплоть до XIX в.









Великий русский математик Н. И. Лобачевский и независимо от него венгерский математик Я. Бойяи показали, что, приняв допущение о возможности проведения через точку нескольких прямых, параллельных данной, можно построить другую, столь же «правильную» «неевклидову геометрию». Так родилась *геометрия Лобачевского.*

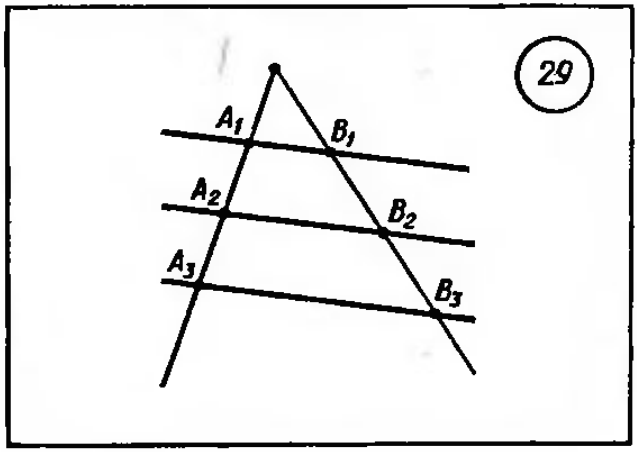
Примером теоремы, которая использует понятие параллельности, а ее доказательство опирается на аксиому параллельных, служит теорема Фалеса. Фалес Милетский — древнегреческий математик, живший в 625—547 гг. до н. э.

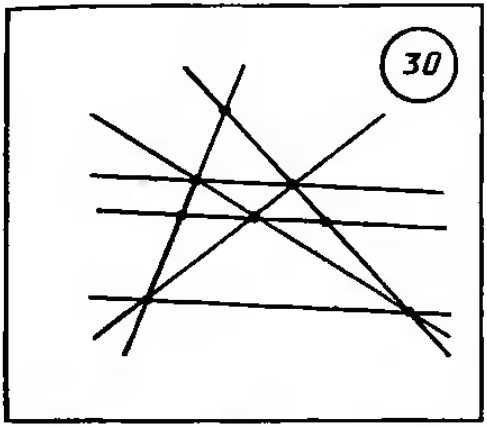
Т. 1. 7. **Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне *(теорема Фалеса).***

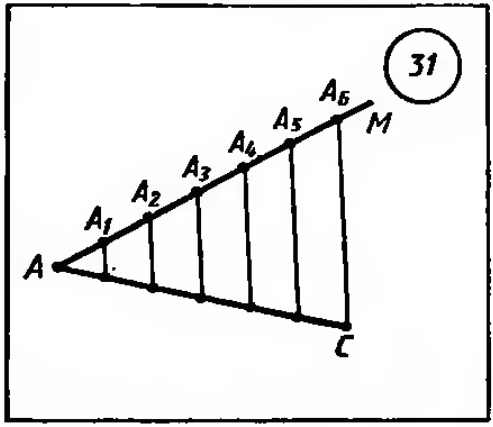
Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3 (рис. 29). Пусть B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Теорема 1.7 утверждает, что если $A_1A_2=A_2A_3$, то $B_1B_2=B_2B_3$.

Пример 1. Могут ли семь прямых пересекаться в восьми точках?

Решение. Могут. Например, на рисунке 30 изображены семь таких прямых, три из которых параллельны.



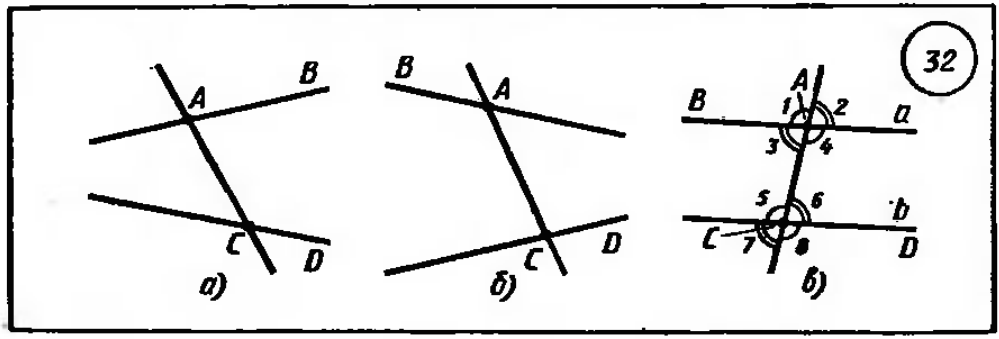




Пример 2. Произвольный отрезок AC разделить на 6 равных частей.

Решение. Начертим отрезок AC. Проведем из точки A луч AM, не лежащий на прямой AC. На луче AM от точки A последовательно отложим 6 равных отрезков (рис. 31). Концам отрезков дадим обозначения A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Соединим точку A_6 отрезком с точкой C и через точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 проведем прямые, параллельные прямой A_6C. Точки пересечения этих прямых с отрезком AC разделят его на 6 равных частей (по теореме 1. 7).

12. Признаки параллельности прямых. Пусть AB и CD — две прямые. Пусть AC — третья прямая, пересекающая прямые AB и CD (рис. 32, *а*). Прямая AC по отношению к прямым AB и CD называется *секущей*. Образованные этими прямыми углы часто рассматриваются попарно. Пары углов получили специальные названия. Так, если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними односторонними* (рис. 32, *а*). Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними накрест лежащими* (рис. 32, *б*).



Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних ($\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$) и две пары внутренних накрест лежащих углов ($\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$, рис. 32, *в*).

Т. 1. 8. | Если внутренние иакрест лежащие углы равны или сумма виутренних одиосторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

На рисунке 32, *в* обозначены цифрами четыре пары углов. Теорема 1.8 утверждает, что если $\angle 3 = \angle 6$ или $\angle 4 = \angle 5$, то прямые a и b параллельны. Теорема 1.8 также утверждает, что если $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ или $\angle 3 + \angle 5 = 180°$, то прямые a и b параллельны.

Теоремы 1.6 и 1.8 являются *признаками параллельности* прямых. Верна и теорема, обратная теореме 1.8.

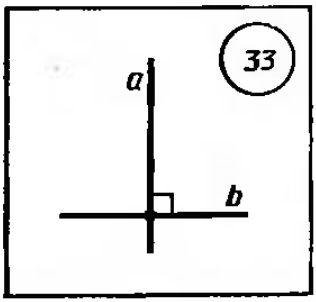
Т. 1. 9. | Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то виутренние накрест лежащие углы равны, а сумма виутренних одностороиииих углов равна 180°.

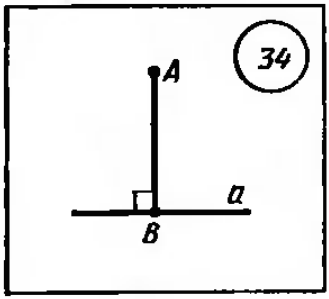
Пример. Один из внутреиних одиосторонних углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, в 4 раза больше другого. Чему равны эти углы?

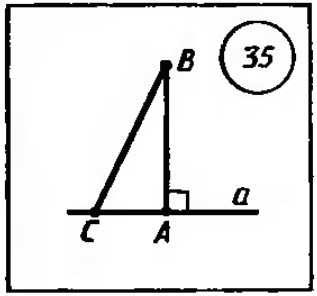
Решение. По теореме 1.9 сумма внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 180°. Обозиачим эти углы буквами α и β, тогда $\alpha + \beta = 180°$; известно, что α больше β в 4 раза, значит, $\alpha = 4\beta$, а тогда $5\beta = 180°$, т. е. $\beta = 36°$, $4\beta = \alpha = 144°$. Итак, $\alpha = 144°$, $\beta = 36°$.

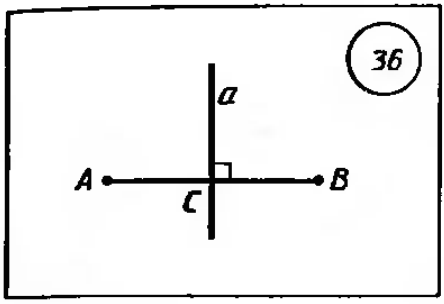
13. Перпендикулярные прямые. Две прямые иазываются *перпендикулярными,* если они пересекаются под прямым углом (рис. 33).

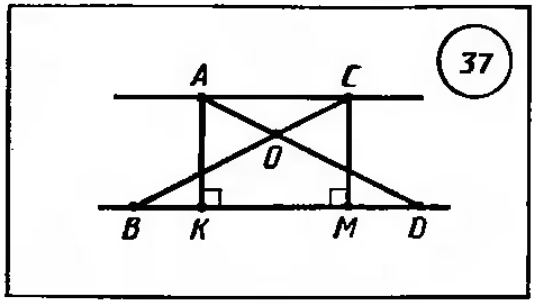
Перпендикулярность прямых записывается при помощи символа $\perp$. Запись $a \perp b$ читается: «Прямая a перпендикуляриа прямой b».











Перпендикуляром к данной прямой иазывается отрезок прямой, перпендикулярной даиной, имеющий коицом их точку пересечения. Этот конец отрезка называется *основанием перпендикуляра.*

На рисунке 34 перпендикуляр AB проведен из точки A к прямой a. Точка B — основание перпендикуляра.

Т. 1. 10. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одиу.

Т. 1. 11. Из любой точки, не лежащей иа даиной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.

Длина перпеидикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой.*

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

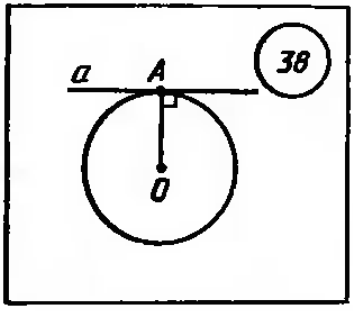
Пусть BA — перпендикуляр, опущеииый из точки B на прямую a, и C — любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC иазывается *наклонной,* проведенной из точки B к прямой a (рис. 35). Точка C называется *основанием наклонной.* Отрезок AC иазывается *проекцией наклонной.*

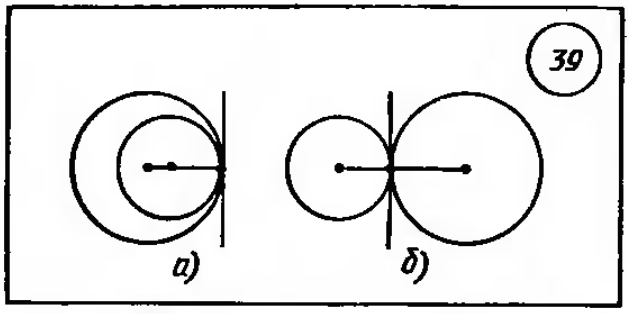
Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром.*

На рисунке 36 прямая a перпендикулярна к отрезку AB и проходит через точку C — середину отрезка AB, т. е. a — середииый перпендикуляр.

Пример. Равные отрезки AD и CB, заключенные между параллельными прямыми AC и BD, пересекаются в точке O. Доказать, что $AO=CO$ и $BO=DO$.

Решение. Проведем из точек A и C перпендикуляры к прямой BD (рис. 37). $AK=CM$ как расстояние между параллельными прямыми. $\triangle AKD$ и $\triangle CMB$ прямоугольные, оии

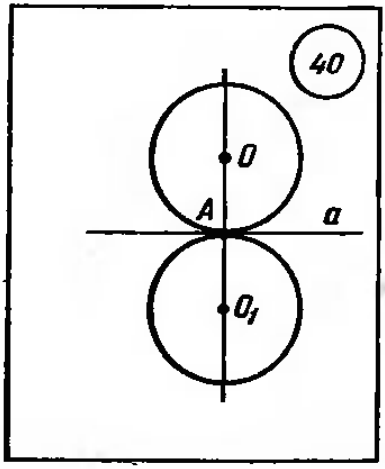


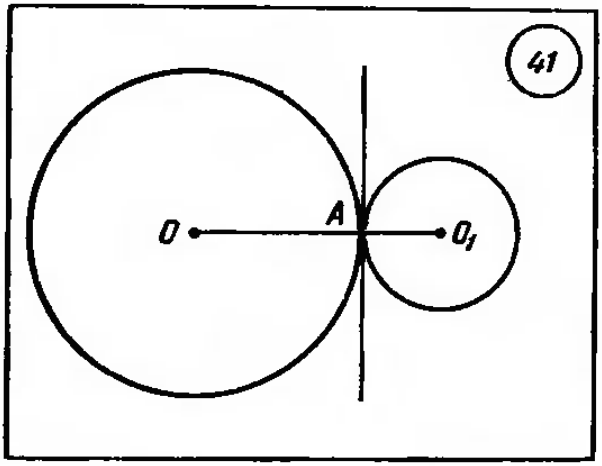


равны по гипотенузе и катету (см. Т. 1. 25), а значит, $\angle CBM = \angle ADK$. $\triangle BOD$ равнобедренный (Т. 1. 19), а значит, $BO = DO$. Из равенства треугольников AKD и CMB следует, что $\angle DAK = \angle BCM$, а тогда $\angle CAO = \angle ACO$, т. е. $\triangle AOC$ равнобедренный, а значит, $AO = CO$.

14. Касательная к окружности. Касание окружностей. Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*. На рисунке 38 прямая a проведена через точку A окружности перпендикулярно к радиусу OA. Прямая a является касательной к окружности. Точка A является точкой касания. Можно сказать также, что окружность касается прямой a в точке A.

Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной. Касание окружностей называется *внешним*, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей





касательной. На рисунке 39, *а* касание окружностей внутреннее, а на рисунке 39, *б* — внешнее.

Пример 1. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

Решение. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Поэтому центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящем через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой (рис. 40).

Пример 2. Две окружности диаметром 4 и 8 см касаются внешним образом. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей?

Решение. Радиусы окружностей OA и O_1A перпендикулярны их общей касательной, проходящей через точку A (рис. 41). Поэтому $OO_1 = OA + AO_1 = 6$ см.

15. Треугольники. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — его *сторонами*. Треугольник обозначается его вершинами. Вместо слова «треугольник» употребляется символ $\triangle$.

На рисунке 42 изображен треугольник ABC; A, B, C — вершины этого треугольника; AB, BC и AC — его стороны.

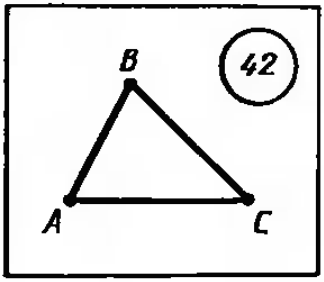
Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

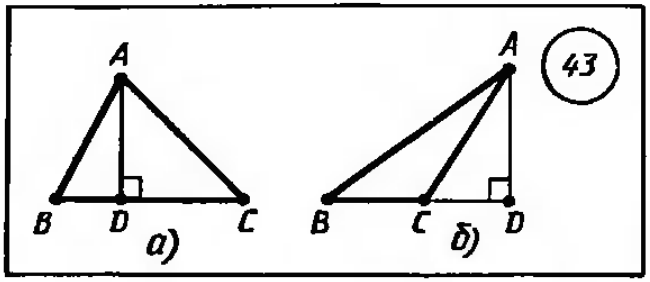
Т. 1. 12. Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника. На рисунке 43, *а* отрезок AD — высота остроугольного $\triangle ABC$, а на рисунке 43, *б* основание высоты тупоугольного $\triangle ABC$ — точка D — лежит на продолжении стороны BC.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне. На рисунке 44 отрезок AD — биссектриса треугольника ABC.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой





противолежащей стороны треугольника. На рисунке 45 отрезок AD — медиана треугольника ABC.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

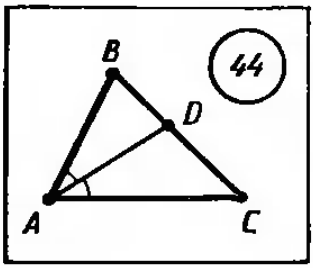
Т. 1. 13. Средияя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равиа ее половине.

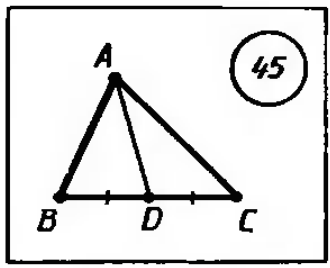
Пусть DE — средияя лииия треугольника ABC (рис. 46). Теорема утверждает, что $DE \parallel AC$ и $DE = \frac{1}{2}AC$.

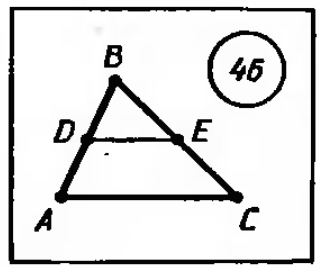
Неравенством треугольника называется свойство расстояиий между тремя точками, которое выражается следующей теоремой:

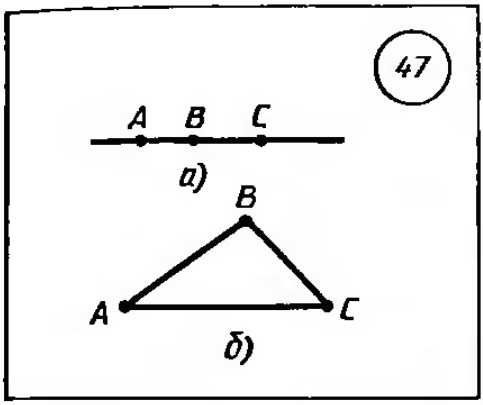
Т. 1. 14. Каковы бы нн были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от иих до третьей точки.

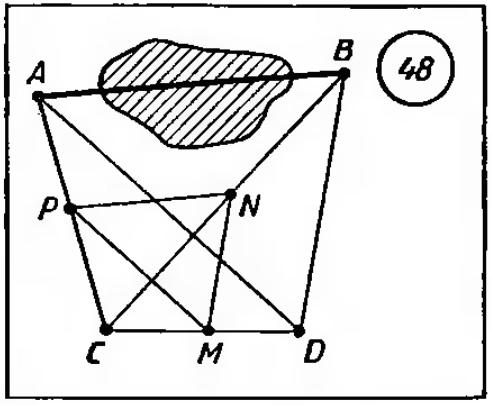
Пусть A, B, C — три данные точки. Взаимное расположение этих точек может быть различным: а) две точки из трех или все три совпадают, в этом случае утверждение теоремы очевидно; б) точки различны и лежат иа одиой прямой (рис. 47, *а*), одиа из иих, иапример B, лежит между двумя другими, в этом случае $AB + BC = AC$, откуда следует, что каждое из трех расстоянн ие больше суммы двух других; в) точки ие лежат











на одной прямой (рис. 47, *б*), тогда теорема 1.14 утверждает, что $AC<AB+BC$.

В случае в) три точки A, B, C являются вершинами треугольника. Поэтому *в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.*

Пример 1. Существует ли треугольник ABC со сторонами: а) $AB=5$ см, $AC=18$ см, $BC=12$ см; б) $AB=7$ см, $AC=8$ см, $BC=12$ см?

Решение. Для сторон треугольника ABC должны выполняться неравенства:

$$AB\leqslant AC+BC \quad (1)$$
$$AC\leqslant AB+BC, \quad (2)$$
$$BC\leqslant AB+AC. \quad (3)$$

В случае а) неравенство (2) не выполняется, значит, такого расположения точек быть не может; в случае б) неравенства (1)—(3) выполняются, т. е. треугольник существует.

Пример 2. Найти расстояние между пунктами A и B, разделенными препятствием.

Решение. Для нахождения расстояния провешиваем базис CD и проводим прямые BC и AD (рис. 48). Находим точку M — середику CD. Проводим $MN\|BD$ и $MP\|AD$. Из $\triangle ABC$ следует, что PN — средняя линия, т. е. $PN=\frac{1}{2}AB$ (Т. 1. 13). Измерив PN, нетрудно найти AB.

16. Равенство треугольников. Два *отрезка* называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два *угла* называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *равными*, если

$$AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1,\ AC=A_1C_1,$$
$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1.$$

Кратко это выражают словами: треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Сформулируем *основное свойство существования равных треугольников* (аксиому существования треугольника, равного данному):

А—IV$_3$. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Справедливы три признака равенства треугольников:

Т. 1. 15. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).*

Т. 1. 16. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам).*

Т. 1.17. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства треугольников по трем сторонам).*

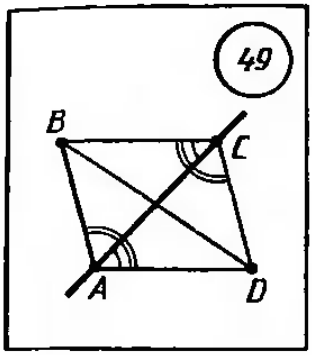
Пример. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC (рис. 49). Известно, что $\angle BCA = \angle DAC$ и $\angle DCB = \angle BAD$. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

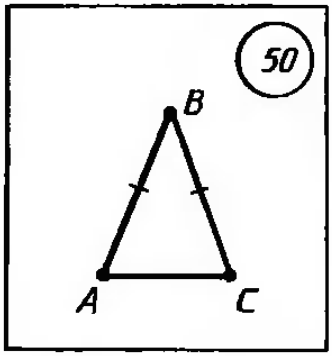
Решение. $\angle BCA = \angle DAC$ по условию, и $\angle BAC = \angle DCA$, так как эти углы получены вычитанием из равных углов BCD и DAB равных углов BCA и DAC. Кроме этого, в указанных треугольниках сторона AC общая. Эти треугольники равны по стороне и прилежащим к ней углам (Т. 1.16).

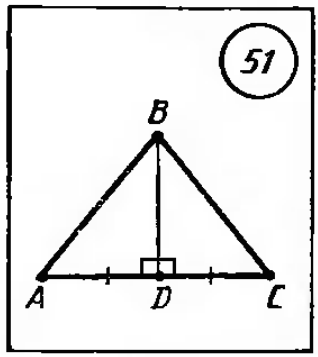
17. Равнобедренный треугольник. Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется основанием треугольника.

В треугольнике ABC (рис. 50) $AB = CB$, значит, $\triangle ABC$ равнобедренный с основанием AC.

Т. 1.18. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.







Т. 1.19. | Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный (*обратная теореме* Т. 1.18).

Т. 1.20. | В равнобедренном треугольнике медианз, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Можно также доказать, что в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой. Аналогично биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним.*

Пример. В треугольнике ADB угол D равен 90°. На продолжении стороны AD отложен отрезок $DC=AD$ (точка D лежит между точками A и C) (рис. 51). Доказать, что треугольнпк ABC равнобедренный.

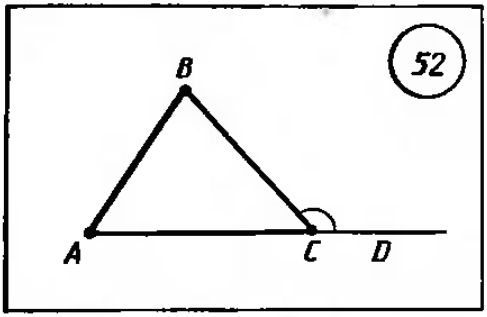
Решение. В треугольниках ADB и CDB известно, что $AD=CD$, BD — общая сторона, а $\angle BDA=\angle BDC=90°$. Следовательно, $\triangle ADB=\triangle CDB$ по двум сторонзм и углу между ними (Т. 1.15). Из равенства треугольников следует, что $BC=AB$, т. е. $\triangle ABC$ равнобедренный.

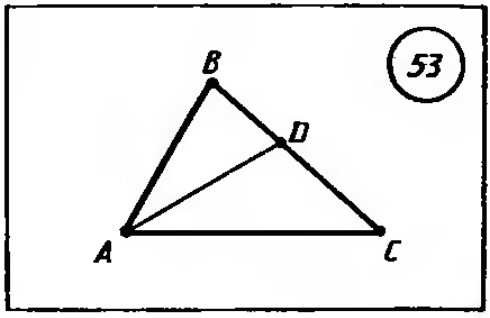
18. Сумма углов треугольника. В любом треугольнике справедлива теорема о сумме его углов.

Т. 1.21. | Сумма углов треугольника равна 180°.

Из теоремы 1.21 следует, что у любого треугольника хотя бы два угла острые.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольннка при этой вершине. На рисунке 52 изображен $\angle BCD$ — внешний угол треугольиика ABC. Чтобы не путать угол треугольника при данной





вершине с внешним углом при этой же вершине, его называют *внутренним углом.*

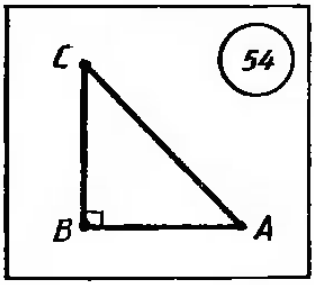
Т. 1.22. | Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

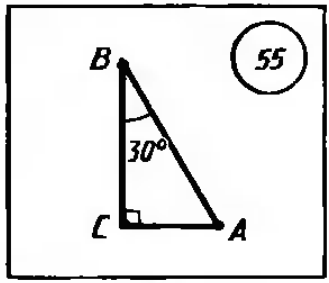
Из теоремы 1.22 следует, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

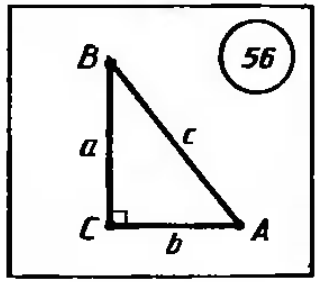
Пример. В треугольнике ABC (рис. 53) $\angle A=60°$, $\angle B=80°$. Биссектриса AD этого треугольника отсекает от него $\triangle ACD$. Найти углы этого треугольника.

Решение. $\angle DAB=30°$, так как AD — биссектриса угла A (см. п. 15). $\angle ADC=30°+80°=110°$ как внешний угол $\triangle ABD$ (Т. 1.22). $\angle C=180°-(110°+30°)=40°$ по теореме о сумме углов $\triangle ACD$ (Т. 1.21).

19. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то у прямоугольного треугольника только один прямой угол. Два других угла прямоугольного треугольника острые, причем они дополняют друг друга до 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*. $\triangle ABC$, изображенный на рисунке 54, прямоугольный, $\angle B$ прямой, CA — гипотенуза, CB и BA — катеты.







Для прямоугольных треугольников можно сформулировать свои признаки равенства.

Т. 1.23. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства по гипотенузе и острому углу).*

Т. 1.24. Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства по катету и противолежащему углу).*

Т. 1.25. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны *(признак равенства по гипотенузе и катету).*

В прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

В треугольнике ABC, изображением на рисунке 55, $\angle C$ прямой, $\angle B = 30°$. Значит, в этом треугольнике $CA = \frac{1}{2}AB$.

В прямоугольном треугольнике справедлива *теорема Пифагора,* названная в честь древнегреческого ученого П и ф а г о р а, жившего в VI в. до н. э.

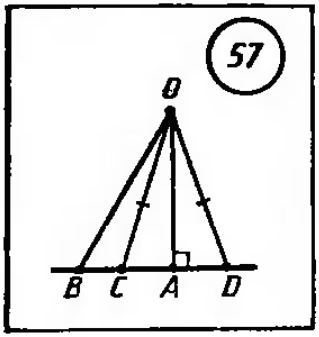
Т. 1.26. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов *(теорема Пифагора).*

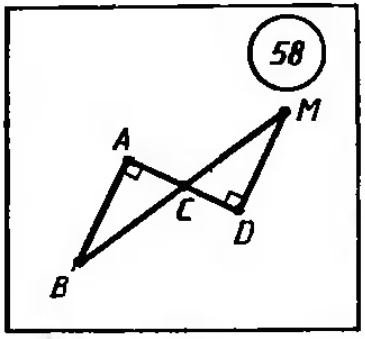
Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C, катетами a и b и гипотенузой c (рис. 56). Теорема утверждает, что $a^2 + b^2 = c^2$.

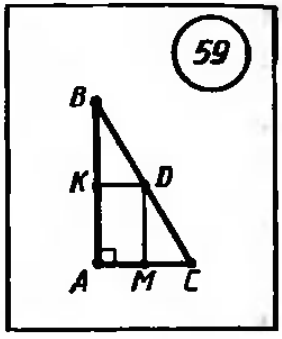
Из теоремы Пифагора следует, что в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Из теоремы Пифагора следует, что если к прямой из одиой точки проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра; равные иаклонные имеют равные проекции; из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

На рисунке 57 из точки O к прямой a проведен перпендикуляр OA и наклонные OB, OC и OD, при этом $OC = OD$, а $OB > OC$. На основании вышесказанного: а) $OA < OB$, $OA < OC$, $OA < OD$; б) $AC = AD$, так как $OC = OD$; в) $AB > AC$, так как $OB > OC$.







Пример 1. В треугольниках ABC и DMC, изображенных на рисунке 58, $AB=DM$, $AB\perp AC$, $MD\perp CD$. Доказать равенство этих треугольников.

Решение. У треугольников ABC и DMC по условию $AB=DM$ и $\angle BAC=\angle MDC=90°$, а $\angle BCA=\angle MCD$ как вертикальные (Т. 1. 4). Треугольники равны по катету и противолежащему углу (Т. 1. 24).

Пример 2. В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найти периметр образовавшегося прямоугольника, если катеты треугольника равны 10 и 8 см.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 59) $\angle A$ прямой, $AB=10$ см, $AC=8$ см, KD и MD — средние линии треугольника ABC, откуда $KD=\frac{1}{2}AC=4$ см, $MD=\frac{1}{2}AB=5$ см (Т. 1. 13). Периметр прямоугольника $KDMA$ равен 18 см.

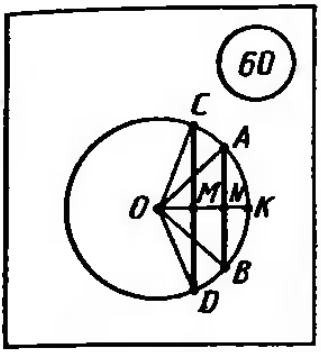
Пример 3. В окружности, радиус которой 25 см, проведены по одну сторону от ее центра две параллельные хорды длиной 40 и 30 см. Найти расстояние между этими хордами.

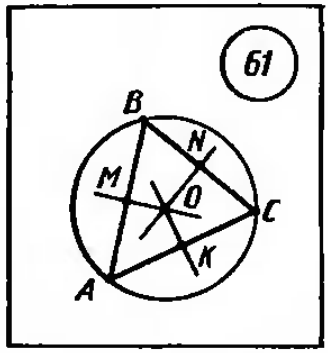
Решение. Проведем радиус OK, перпендикулярный хордам AB и CD, соединим центр окружности O с точками C, A, D и B (рис. 60). Треугольники COD и AOB равнобедренные, так как $OC=OD$ и $OA=OB$ (как радиусы); OM и ON — высоты этих треугольников. По теореме 1.20 каждая из высот является одновременно медианой соответствующего треугольника, т. е. $DM=MC$ и $BN=NA$.

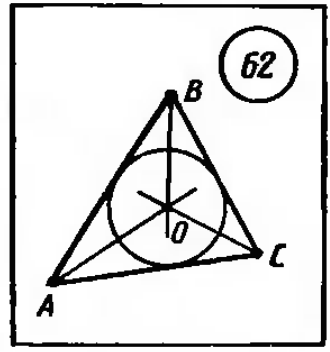
Треугольники OCM и OAN прямоугольные, в них $OC=OA=25$ см, $CM=20$ см, $AN=15$ см. ON и OM найдем по теореме Пифагора (Т. 1. 26): $ON=\sqrt{25^2-15^2}=20$ см, $OM=\sqrt{25^2-20^2}=15$ см.

$$MN=ON-OM, \text{ т. е. } MN=5 \text{ см.}$$

20. Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника. Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.







Т. 1.27. | **Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.**

На рисунке 61 окружность описана около треугольника ABC. Центр этой окружности O является точкой пересечения серединных перпендикуляров OM, ON и OK, проведенных соответственно к сторонам AB, BC и CA.

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Т. 1. 28. | **Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.**

На рисунке 62 окружность вписана в треугольник ABC. Центр этой окружности O является точкой пересечения биссектрис AO, BO и CO соответствующих углов треугольника.

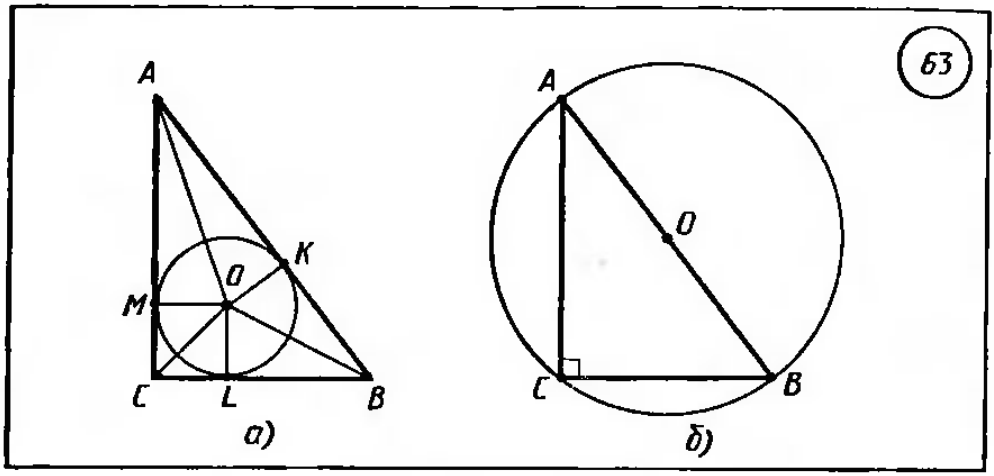
Пример. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16 см. Вычислить радиусы: 1) вписанной в него окружности; 2) описанной окружности.

Решение. 1) Пусть дан треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, $BC=12$ см, $AC=16$ см, O — центр вписанной окружности (рис. 63, *а*). Периметр треугольника ABC равен сумме удвоенной гипотенузы и диаметра вписанной в треугольник окружности (используйте определение касательной к окружности и равенство прямоугольных треугольников AOM и AOK, MOC и LOC по гипотенузе и катету).

Таким образом, $AB+BC+AC=2AB+2r$, откуда $2r=$ $=AB+BC+AC-2AB=BC+AC-AB$.

$AB=20$ см по теореме Пифагора (Т. 1. 26), $2r=8$ см, т. е. $r=4$ см.

2) Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы, откуда радиус описаниой окружности $R=10$ см (рис. 63, *б*).



§ 3. Геометрические построения на плоскости

21. Чертежные инструменты. В геометрии постоянно приходится решать задачи на построение геометрических фигур с помощью чертежных инструментов.

В некоторых случаях в задаче сказано, какие чертежные инструменты можно применять при построении. В случаях, когда это не оговорено, можно самим выбирать нужные для построения инструменты.

В школьном курсе геометрии мы пользуемся такими чертежными инструментами, как *линейка* (односторонняя), *циркуль, угольник, транспортир.*

Существуют различные типы задач на построение в зависимости от набора инструментов: построения циркулем и линейкой; построения только одним циркулем (построения Мора-Маскерони); построения только одной линейкой, если на плоскости начерчена окружность и ее центр (построения Штейнера); с помощью угольника; с помощью транспортира и т. д.

С помощью линейки можно начертить (в виде отрезка) изображение: а) произвольной прямой; б) прямой, проходящей через данную точку; в) прямой, проходящей через две данные точки. С помощью линейки иельзя откладывать отрезки, даже если на ней имеются деления, нельзя пользоваться обонми краями линейки.

С помощью циркуля можно: а) построить окружность данного радиуса с центром в данной точке; б) отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

С помощью угольника можно выполнить те же построения, что и линейкой; кроме того, можно совместить одну из сторон угольника с даниой прямой и провести прямую по другой

стороне угла. С помощью угольника можно также построить прямой угол. В п. 11 (рис. 26) рассказано, как с помощью угольника и линейки можно построить параллельные прямые.

С помощью транспортира можно построить точку на луче, образующем некоторый данный угол с данной прямой с вершиной в данной точке. На рисунке 16 (п. 8) показано, как с помощью транспортира можно отложить от полупрямой в верхнюю полуплоскость угол с заданной градусной мерой.

В геометрии, как правило, точными считаются построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки.

Есть задачи на построение, про которые известно, что они не разрешимы с помощью циркуля и линейки.

1) Задача о трисекции угла. Дан угол α. Построить угол $\frac{1}{3}\alpha$.

2) Задача об удвоении куба. Дан куб (т. е. дан отрезок, равный ребру куба). Построить другой куб (т. е. построить ребро такого куба), объем которого вдвое больше объема данного куба.

3) Задача о квадратуре круга. Дан круг. Построить квадрат, равновеликий этому кругу.

Доказательство неразрешимости этих задач требует глубоких математических знаний. Глава «Декартовы координаты на плоскости» познакомит вас с аналитическим методом решения геометрических задач, когда задача переводится на язык формул. Доказано, что если геометрическая фигура, которую мы хотим построить, может быть выражена формулой, содержащей только рациональные функции и действие извлечения квадратного корня, то тогда этот объект можно построить с помощью циркуля и линейки.

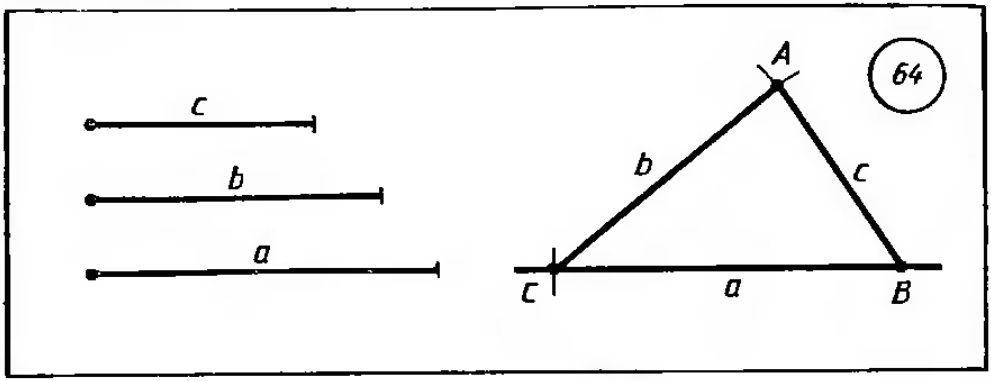
22. Простейшие задачи на построение. Во всех рассматриваемых здесь задачах можно пользоваться только двумя чертежными инструментами — линейкой и циркулем.

В школьном курсе геометрии при решении задач на построение прежде всего нужно знать, как выполнить построение, а уже потом его выполнять. Кроме этого, важно уметь доказать, что предложенное построение привело к построению фигуры с требуемыми свойствами.

Рассмотрим *простейшие задачи на построение.*

Задача 1. *Построить треугольник с данными сторонами* a, b *и* c.

На рисунке 64 построение $\triangle ABC$ выполнено так: с помощью линейки провели прямую и с помощью циркуля — три окружности: радиусами $BC=a$ и $BA=c$ с центром в точке B, радиусом $CA=b$ с центром в точке C.



Эта задача не всегда может иметь решение. Для сторон a, b, c треугольника должны выполняться условия:

$$a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b$$ (см. п. 15).

З а д а ч а 2. *Построить угол, равный данному.*

На основании аксиомы $A—IV_2$ (см. п. 8) от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному углу. Как это сделать с помощью циркуля и линейки?

На рисунке 65 построение выполнено так: $\angle A$ — данный угол, OB_1 — данная полупрямая. Провели две окружности с центрами A и O одинакового произвольного радиуса и окружность с центром B_1 радиуса BC. Очевидно, $\triangle BAC = \triangle B_1OC_1$ по третьему признаку равенства треугольников (Т. 1. 17), откуда $\angle A = \angle 0$.

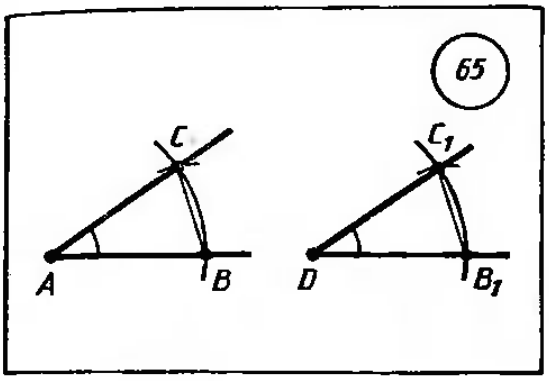
З а д а ч а 3. *Построить биссектрису данного угла.*

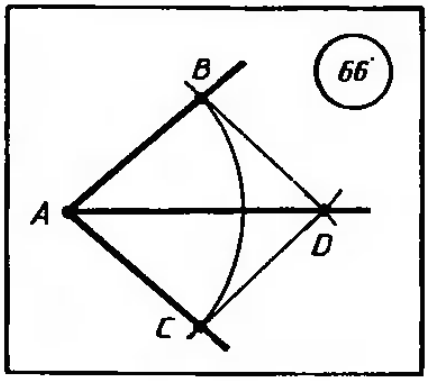
На рисунке 66 построение биссектрисы AD данного угла BAC выполнено так: построили три окружности с центрами в точках A, B и C одного произвольного радиуса. Точку пересечения окружностей с центрами в точках B и C — точку D соединим с точкой A. Полупрямая AD — биссектриса угла BAC. Доказательство этого факта основано на равенстве треугольников ABD и ACD по третьему признаку равенства треугольников (Т. 1. 17).

З а д а ч а 4. *Разделить отрезок пополам.*

На рисунке 67 построение середины отрезка AB выполнено так: строим две окружности с центрами в точках A и B радиусом AB. Точки C и C_1 лежат в разных полуплоскостях, поэтому отрезок CC_1 пересекает AB в точке O — середине отрезка AB.

Доказательство основано на рассмотрении равных треугольников: $\triangle CAC_1 = \triangle CBC_1$ (Т. 1. 17), $\triangle ACO = \triangle BCO$ (Т. 1. 15).





З а д а ч а 5. *Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.*

Возможны два случая:

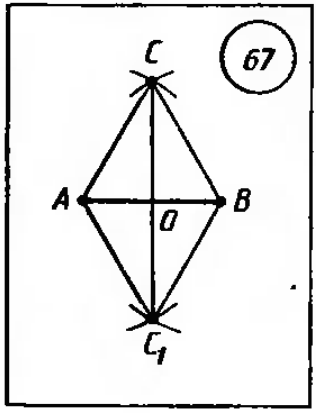
1) Точка O принадлежит прямой a. Построение изображено на рисунке 68. Строим три окружности: с центром в точке O произвольного радиуса (она пересекает прямую a в точках A и B), с центрами в точках A и B раднусом AB. Точку пересечения двух последних окружностей — точку C соединим с точкой O. Прямая OC искомая.

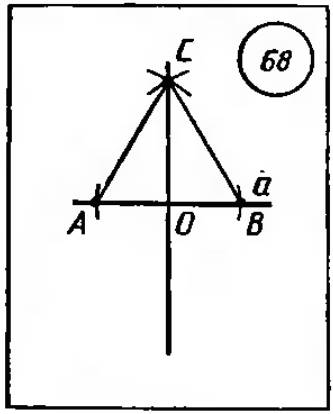
Перпендикулярность прямых следует из равенства треугольников ACO и BCO (Т. 1. 17).

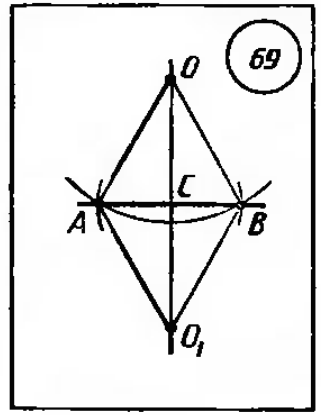
2) Точка O не принадлежит прямой a. Построение, изображенное на рисунке 69, выполнено так: построили три окружности: с центром в точке O произвольного радиуса, A и B — точки пересечения этой окружности с прямой a; с центрами в точках A и B тем же радиусом, O_1 — точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, в которой не лежит точка O. Прямая OO_1 — искомый перпендикуляр.

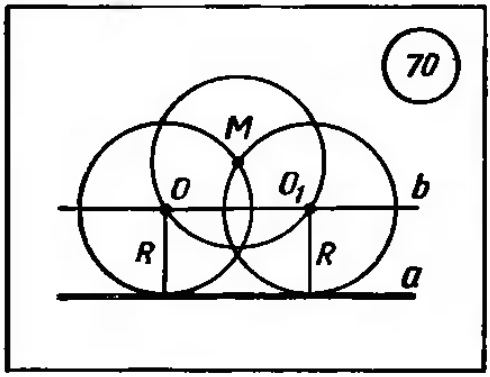
Доказательство проводим так:

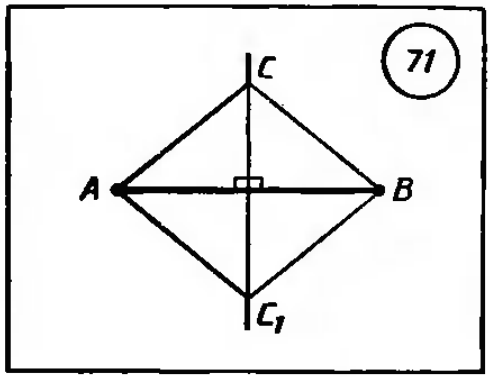
1) $\triangle AOB = \triangle AO_1B$ (Т. 1. 17), отсюда $\angle OAC = \angle O_1AC$.











2) $\triangle AOC = \triangle AO_1C$ (Т. 1. 15), отсюда $\angle ACO = \angle ACO_1$.

3) $\angle ACO$ и $\angle ACO_1$ смежные, а так как они равны, то они прямые. Значит, OC — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a.

Рассмотренные задачи применяются при решении более сложных задач на построение.

Пример. Построить окружность данного радиуса R, касающуюся данной прямой a и проходящую через данную точку M, не лежащую на этой прямой.

Решение. Предположим, что задача решена и построена окружность с центром O данного радиуса R, касающаяся прямой a и проходящая через точку M (рис. 70). Ее центр лежит на прямой $b \parallel a$, находящейся от a на расстоянии R, а точка O есть точка пересечения окружности того же радиуса с центром в точке M и прямой b.

Построение выполняем в такой последовательности:

1) Проводим прямую b, параллельную a и находящуюся от a на расстоянии R.

2) Проводим окружность с центром в точке M радиусом R.

Точка пересечения O прямой b и проведенной окружности — центр искомой окружности. Доказательство очевидно: построенная окружность касается прямой a, имеет радиус R и проходит через точку M. Задача может иметь два, одно решение или не иметь решений. (Рассмотрите различные случаи сами. На рисунке 70 приведены два решения.)

23. Геометрическое место точек на плоскости. *Геометрическим местом точек на плоскости* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством.

Т. 1.29. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки.

На рисунке 71 к отрезку AB проведен серединный перпендикуляр CC_1. Т. 1. 29 утверждает, что: а) каждая точка прямой CC_1 равноудалена от A и B; б) каждая точка плоскости, равноудаленная от A и B, лежит на прямой CC_1.

Ниже перечислены несколько геометрических мест точек на плоскости.

1. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от даниой точки, есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным данному расстоянию.

2. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух прямых, каждая из которых параллельна данной и отстоит от нее иа данное расстояние.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, состоит из двух прямых, на которых лежат биссектрисы всех углов, полученных при пересечении данных прямых.

4. Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом α и которые лежат по одну сторону от прямой AB, есть дуга окружности с концами в точках A и B.

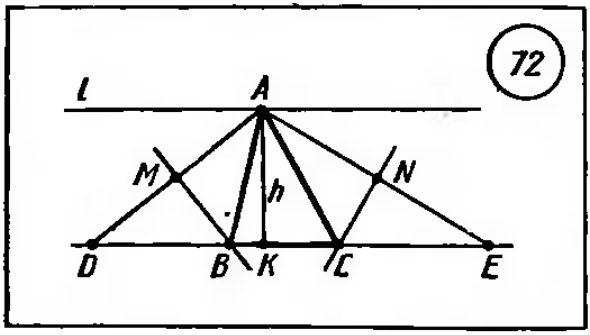
Метод геометрических мест, применяемый при решении задач на построение, основан иа следующем.

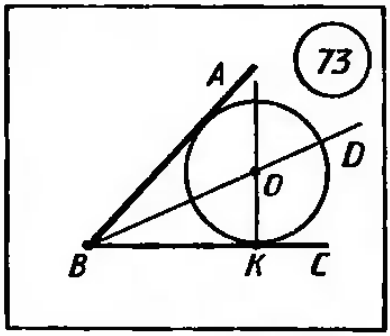
Пусть нам надо построить точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их общей точкой.

Пример 1. Построить $\triangle ABC$ по периметру p, углу B, равному β, и высоте h, опущенной из вершины A.

Решение. Пусть задача решена и $\triangle ABC$ построен (рис. 72). Отложив на прямой BC отрезки $DB=AB$ и $CE=AC$, получим равнобедреииые треугольники ABD и ACE.

Исходя из приведенных выше рассуждений построение можно осуществить в следующей последовательности:





1) Проводим прямую и на ней откладываем отрезок $DE=p$.

2) На расстоянии h от прямой DE проводим прямую l, параллельную DE.

3) С вершиной в точке D строим угол ADE, равный $\frac{\beta}{2}$. Точка A — одна из вершин искомого треугольника.

4) Проводим серединные перпендикуляры к отрезкам AD и AE. Точки B и C пересечения этих серединных перпендикуляров с прямой DE — две другие вершины искомого треугольника.

Доказательство того, что $\triangle ABC$ искомый, проводим так: высота этого треугольника равна h по построению, $\angle ABC=2\angle ADB=\beta$ ($\triangle ABD$ равнобедренный, $\angle ABC$ — внешний угол этого треугольника, см. Т. 1. 22), $AB+BC+CA=p$ по построению.

Пример 2. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них в данной точке K.

Решение. Пусть задача решена и окружность с центром O искомая. Центр окружности — точка O принадлежит, с одной стороны, биссектрисе BO данного угла, а с другой — перпендикуляру KO, проведенному к прямой BC в данной точке K (рис. 73).

Порядок построения таков:

1) Проводим биссектрису BO данного угла ABC.

2) Из точки K к стороне BC угла ABC проводим перпендикуляр KL.

3) Из точки O пересечения KL и BO как из центра проводим радиусом, равным OK, окружность.

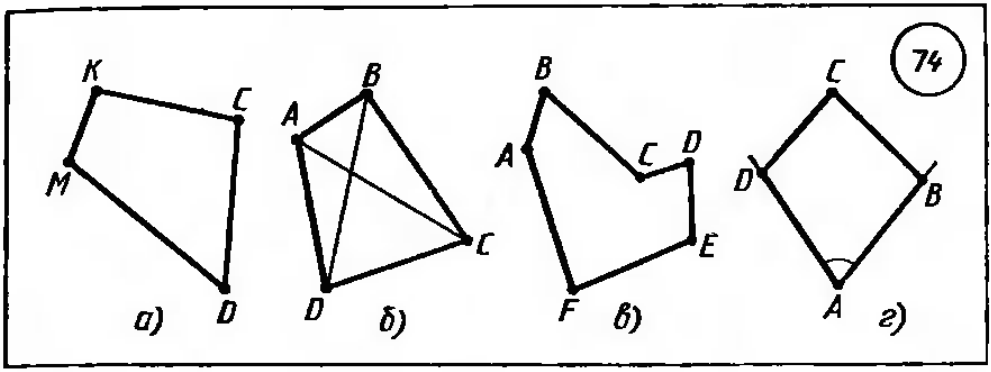
Построенная окружность искомая.

§ 4. Четырехугольники

24. Выпуклые четырехугольники. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки — *сторонами* четырехугольника.

Четырехугольник обозначается его вершинами. Например, на рисунке 74, *а* изображен четырехугольник $MKCD$.

Вершины четырехугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*. У четырехугольника $ABCD$ на рисунке 74, *б* вершины A и B являются соседними, а вершины B и



D — противолежащими; диагоналями являются отрезки AC и BD.

Стороны четырехугольника, исходящие из одиой вершины, называются *соседними* сторонами. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими* сторонами. У четырехугольника $ABCD$ на рисунке 74, *б* противолежащими являются стороны AB и DC, BC и AD, а стороны AB и AD являются соседними.

Четырехугольник (как и любой многоугольиик) иазывается *выпуклым,* если он расположеи в одиой полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунках 74, *а* и 74, *б* четырехугольники выпуклые, а на рисунке 74, *в* невыпуклый многоугольник.

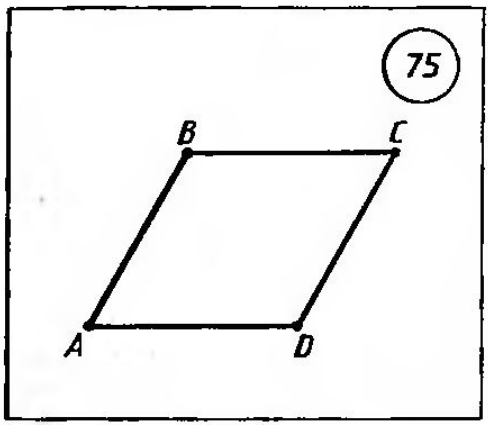
Дальше мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники. *Углом* выпуклого четырехугольника $ABCD$ при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AD. На рисунке 74, *г* $\angle BAD$ — угол выпуклого четырехугольника.

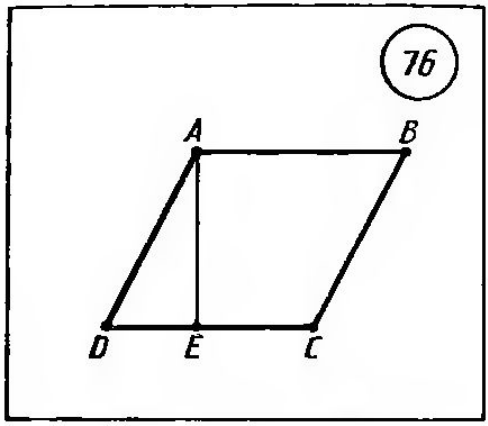
25. Параллелограмм. *Параллелограмм* — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых. На рисунке 75 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, у которого $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$. Можно доказать следующий *признак параллелограмма:*

Т. 1.30. Если диагоиали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Сформулируем обратную теорему.

Т. 1. 31. Диагоиали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.





Следующая теорема формулирует еще одио свойство параллелограмма.

Т. 1.32. У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Из вершины A на прямую CD опущен перпендикуляр AE (рис. 76). Отрезок AE называется *высотой* параллелограмма, соответствующей сторонам AB и CD.

Пример 1. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найти стороны параллелограмма.

Решение. По теореме 1.32 противолежащие стороны параллелограмма равны. Обозначим одну сторону параллелограмма x, другую y. Тогда по условию

$$\begin{cases} 2x+2y=122, \\ x-y=25. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x=43$, $y=18$. Таким образом, стороны параллелограмма равны 18, 43, 18 и 43 см.

Пример 2. Построить параллелограмм по периметру, диагонали и противолежащему ей углу.

Решение. Предположим, что задача решена и параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 77). Продолжив AB и отложив $BE=BC$, получим $\triangle ACE$, в котором $\angle E=\frac{1}{2}\angle ABC$, так как $\triangle BCE$ равнобедренный, а $\angle B$ — его внешний угол. Решение задачи сводится к построению $\triangle ACE$ по стороне AC, углу E и стороне AE, равной полупериметру параллелограмма. Далее строим $\triangle ABC$ и дополняем его до параллелограмма.

Пример 3. Найти расстояние между недоступными точками A и B, используя признак параллелограмма (Т. 1. 30).

Решение. Провешиваем базис CD (рис. 78). O — середина отрезка CD. По стороне и двум прилежащим углам строим $\triangle A_1OD = \triangle AOC$ и $\triangle B_1OC = \triangle BOD$. Из равенства треугольников следует, что $AO = A_1O$ и $BO = B_1O$. Так как диагонали AA_1 и BB_1 четырехугольника ABA_1B_1 точкой O делятся пополам, полученный четырехугольник ABA_1B_1 есть параллелограмм (Т. 1. 30), т. е. $AB = A_1B_1$ (Т. 1. 32). Остается измерить A_1B_1.

26. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. *Прямоугольник* — это параллелограмм, у которого все углы прямые. На рисунке 79, *а* изображен прямоугольник $ABCD$ ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$).

Можно доказать теорему о свойстве прямоугольника.

Т. 1.33. | Диагонали прямоугольника равны.

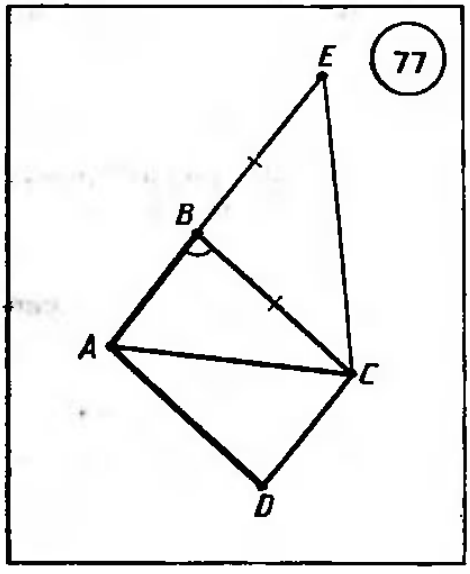
Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

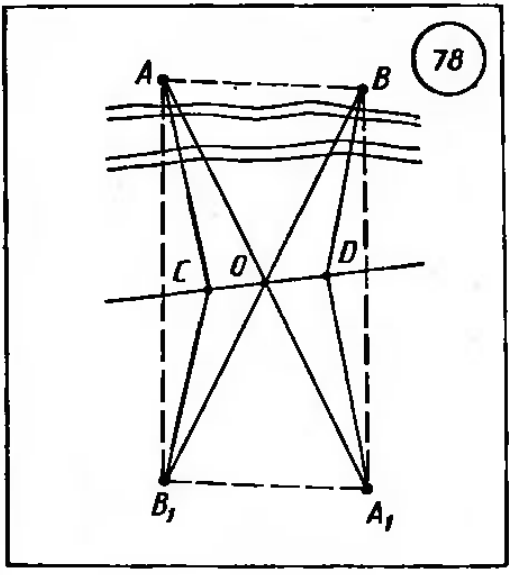
На рисунке 79, *б* изображен ромб $ABCD$ ($AB = BC = CD = AD$).

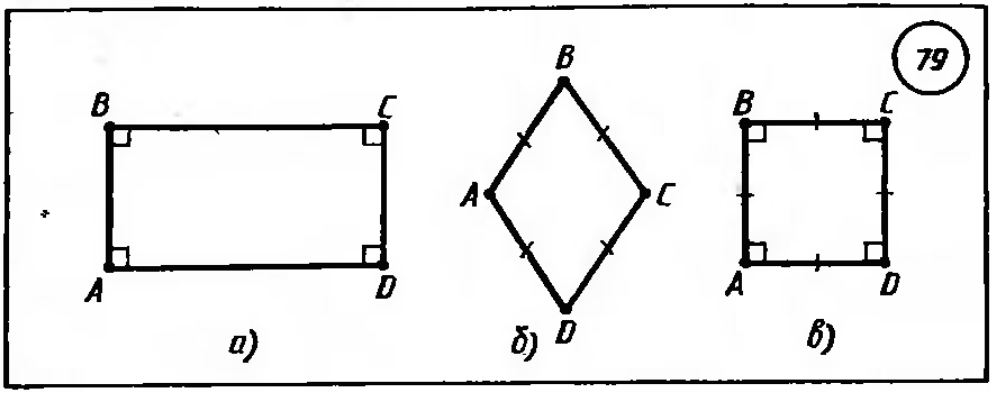
Справедлива теорема о свойствах ромба.

Т. 1. 34. | Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.







На рисунке 79, *в* изображен квадрат $ABCD$. Квадрат является и ромбом, поэтому обладает свойствами как прямоугольника, так и ромба.

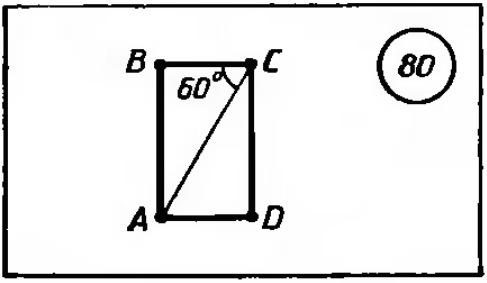
Пример 1. Сторона прямоугольника равна 4 см и образует с диагональю угол 60°. Найти эту диагональ.

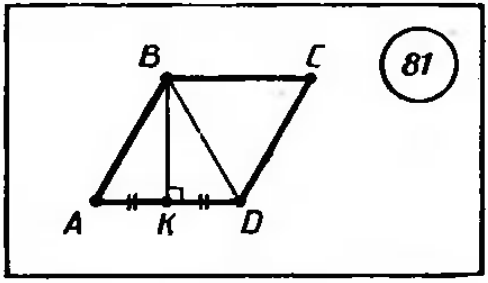
Решение. $\triangle ABC$ прямоугольный, в нем катет $BC=4$ см, а $\angle BAC=30°$ (рис. 80). По свойству катета, лежащего в прямоугольном треугольнике против угла 30°, $BC=\frac{1}{2}AC$ (см. п. 19). Итак, $AC=8$ см.

Пример 2. Найти углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABD$ (рис. 81). В нем $AB=AD$ как стороны ромба; его высота по условию является и его медианой. Следовательно, $\triangle ABD$ является равнобедренным и при основании AD. Значит, $AB=BD$. Итак, $\triangle ABD$ равносторонний, а значит, $\angle A=60°$. Таким образом, в ромбе $ABCD$ можно найти углы: $\angle A=\angle C=60°$, $\angle B=\angle D=120°$ (Т. 1. 32).

27. Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми сторонами*.





На рисунке 82, *а* изображена трапеция $ABCD$. Стороны BC и AD — основания трапеции, AB и CD — боковые стороны трапеции. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*. У трапеции $KMDC$ (рис. 82, *б*) $KM=DC$, а значит, эта трапеция является равнобокой.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции. На рисунке 82, *в* отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

Сформулируем теорему о свойстве средией линии трапеции.

Т. 1.35. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

На рисунке 83, *а* изображена трапеция $ABCD$. Из точек A и B опущены перпендикуляры AE и BF на прямую CD. Отрезки AE и BF равны расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. Это расстояние называется *высотой* трапеции.

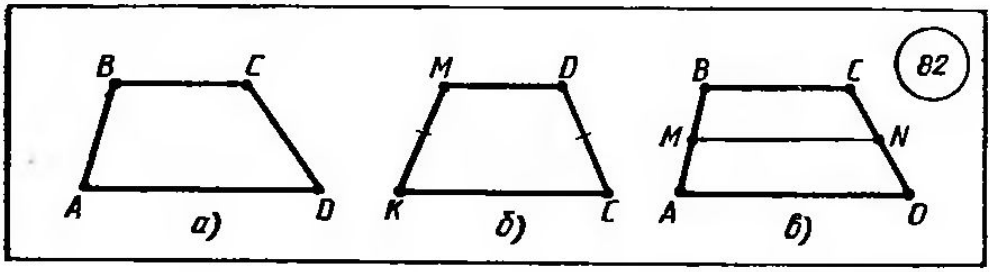
Пример 1. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна к ее боковой стороне и образует с основанием угол 15°. Найти углы трапеции.

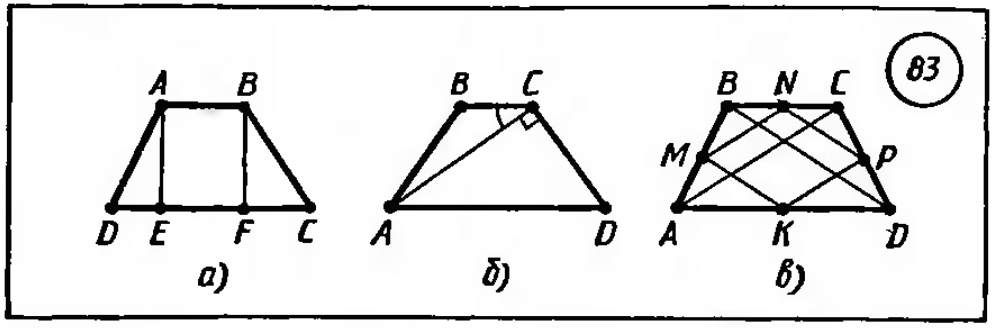
Решение. Углы при осиованиях равнобокой трапеции равны, т. е. $\angle ABC=\angle DCB$, $\angle BAD=\angle CDA$ (рис. 83, *б*); $\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD=15°+90°=105°$, $\angle CDA=180°-\angle BCD=180°-105°=75°$. Итак, углы при основаиии BC равны по 105°, а углы при основании AD равны по 75°.

Пример 2. Доказать, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

Решение. Точки M, N, P и K — середины сторон AB, BC, CD и DA равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 83, *в*). Отрезки MN и KP параллельны AC и равны ее половине как средние линии треугольников ABC и ADC (Т. 1. 13); аналогичио MK и NP параллельны BD и равны ее половине. Поэтому четырехугольник $MNPK$ — параллелограмм.

$\triangle ABD=\triangle DCA$ (Т. 1. 15), MK и PK — средние линии этих треугольников, значит, $MK=PK$. Аналогично $MN=NP$.





Таким образом, в параллелограмме $MNPK$ все стороны равны, а значит, он является ромбом.

§ 5. Многоугольники

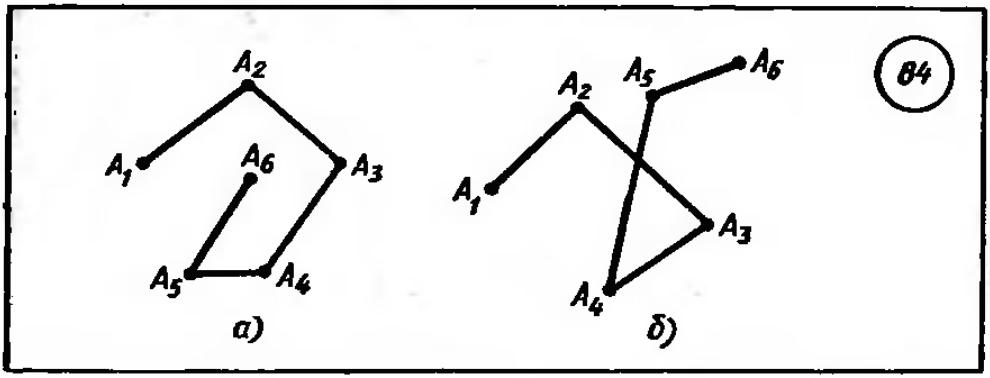
28. Ломаная. *Ломаной* $A_1A_2...A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2,..., A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, ..., A_n называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — *звеньями* ломаной. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. На рисунке 84, *а* показана простая ломаная. Ломаная на рисунке 84, *б* имеет самопересечения.

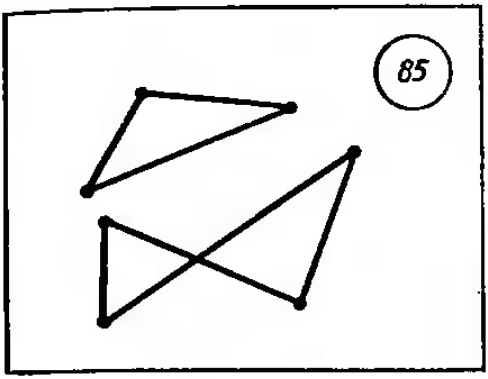
Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают. На рисунке 85 изображены замкнутые ломаные.

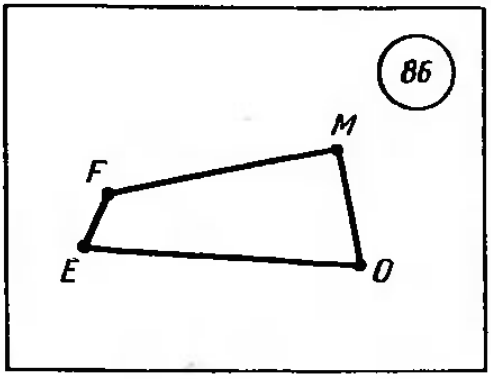
Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

Т. 1. 36. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Пример. Звенья ломаной $EFMO$ таковы: $EF=1$ см, $FM=4$ см, $MO=2$ см. Может ли отрезок EO равняться: а) 0,5 см; б) 8 см?







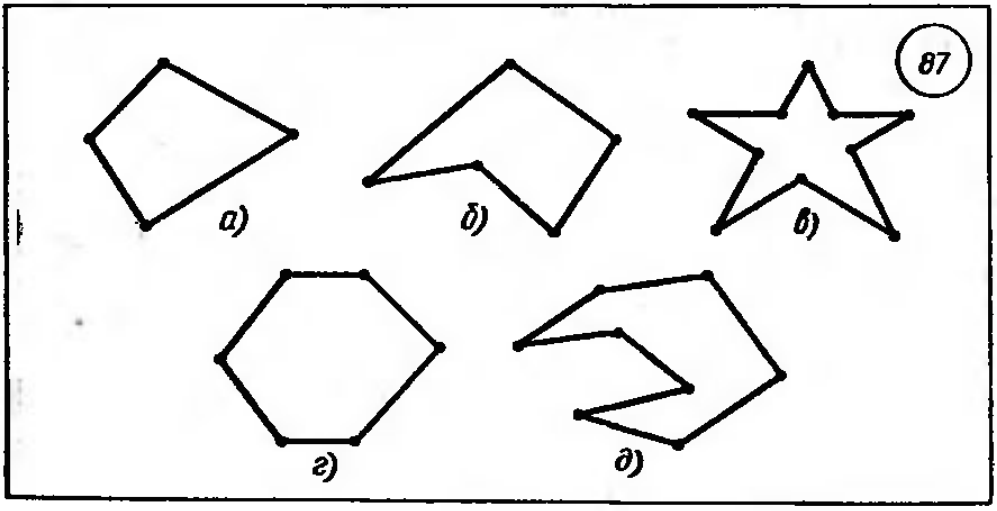
Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой 1. 36. Исходя из этой теоремы длина ломаной *EFMO* должна быть ие меньше длины отрезка *EO*, соединяющего ее концы (рис. 86). Длина ломаной *EFMO* равна 7 см, а значит, отрезок *EO* должен быть не больше 7 см.

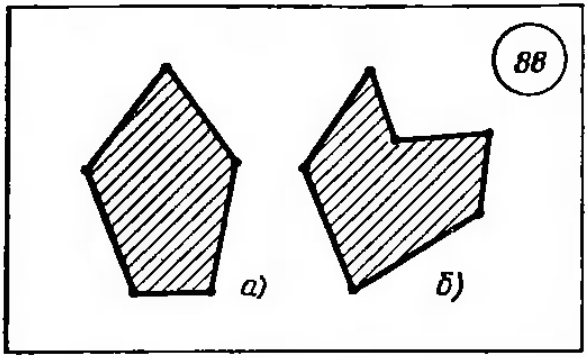
Итак, отрезок *EO* может быть равен 0,5 см и не может быть равен 8 см.

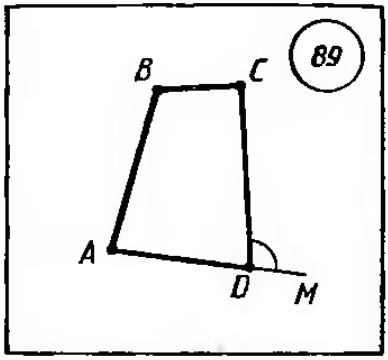
29. Выпуклые многоугольники. Простая замкнутая ломаиая называется *многоугольником*, если ее соседние звенья не лежат иа одиой прямой.

На рисунке 87 изображены различные многоугольники.

Вершины ломаной называются *вершинами* многоугольника, а звенья ломаной — *сторонами* многоугольника. Отрезки, соединяющие несоседиие вершины многоугольника, иазываются *диагоналями*. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется *n-угольником*.







Плоским многоугольником или *многоугольной областью* называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником. На рисунке 88 изображены плоские многоугольники или многоугольные области.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунке 88, *а* изображен выпуклый многоугольник, а на рисунке 88, *б* — невыпуклый. *Углом* выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

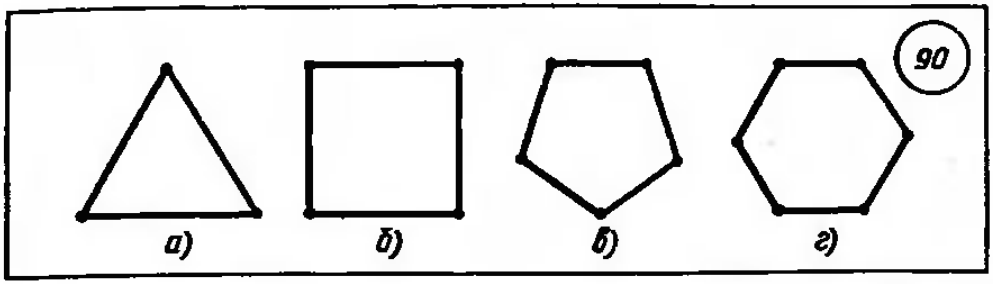
Т. 1.37. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ (n-2)$.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. На рисунке 89 $\angle CDA$ — внутренний угол выпуклого многоугольника $ABCD$, а $\angle CDM$ — внешний.

Пример. Найти углы выпуклого пятиугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 5, 7, 11.

Решение. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$ (Т. 1. 37). Приняв за x меньший из углов, составим уравнение: $x+3x+5x+7x+11x=540$, откуда $x=20$. Таким образом, углы пятиугольника равны 20°, 60°, 100°, 140°, 220°.

30. Правильные многоугольники. Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны. На рисунке 90 изображены правильные многоугольники: треугольник, четырехугольник (квадрат), пятиугольник и шестиугольник.



Миогоугольник называется *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат иа некоторой окружности. Миогоугольник называется *описанным около окружности*, если все его стороны касаются иекоторой окружиости.

На рисунке 91 многоугольник $ABCDE$ вписан в окружиость, а многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ описан около окружности.

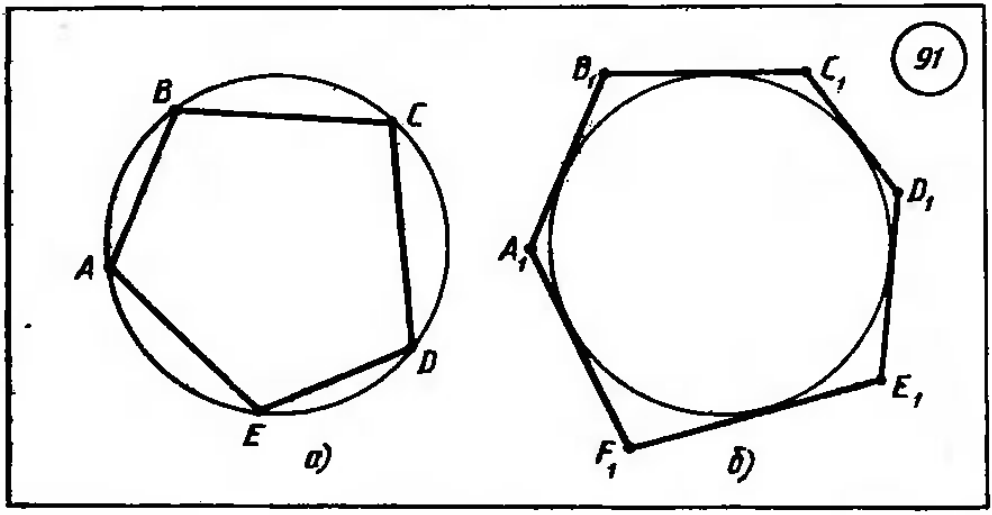
Т. 1.38. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружиость и описанным около окружности.

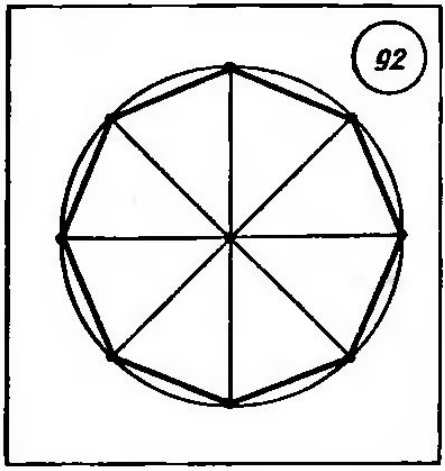
Радиус R окружности, описанной около правильного n-угольника со стороиой a, находится по формуле

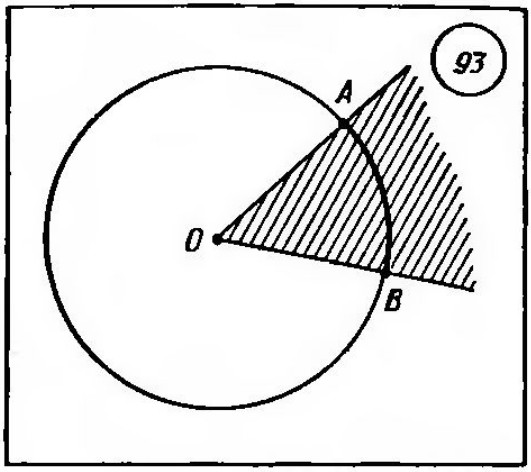
$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Радиус окружиости, вписанной в правильный n-угольник со стороной a, иаходится по формуле

$$r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$







Для правильного равностороннего треугольника ($n=3$)

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Для правильного четырехугольника (квадрата) ($n=4$)

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ r=\frac{a}{2}.$$

Для правильного шестиугольника ($n=6$)

$$R=a,\ r=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пример. Вписать в данную окружность правильный восьмиугольник.

Решение. Два перпендикулярных диаметра делят окружность на четыре равные части. Для построения правильного восьмиугольника необходимо каждую из этих частей разделить пополам, т. е. провести биссектрисы прямых углов, и полученные 8 точек окружности последовательно соединить отрезками. Получим вписанный в окружность восьмиугольник (рис. 92). Равенство сторон и равенство углов восьмиугольника следует из равенства всех восьми треугольников, которые равны по двум сторонам и углу между ними (Т.1.15). Следовательно, полученный восьмиугольник правильный.

31. Длина окружности. Из наглядных соображений ясно, что длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами. Имеет место такое свойство длины окружности:

Т.1.39. **Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.**

Отношенне длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»): $\frac{C}{2R}=\pi$, где C — длина окружности, R — ее радиус. Число π иррациоиальное, $\pi\approx 3{,}1416$.

Таким образом, *длина окружности* вычисляется по формуле

$$C=2\pi R.$$

На рисунке 93 изображена дуга AB окружности с центром O.

Длина дуги окружности, соответствующей центральному углу в $n°$, иаходится по формуле

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot n.$$

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы длины дуги окружности следует, что $\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180}\cdot n$, т. е. радианная мера угла получается из градусной умиожением на $\frac{\pi}{180}$; в частности, радианная мера угла 180° равна π, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$.

Единицей радианной меры углов является *радиан*. Угол в одии радиаи — это центральный угол, у которого длиia дуги равна радиусу. Градусная мера угла в один радиаи равна $\frac{180°}{\pi}\approx 57°$.

Пример 1. Точки M и N делят окружность иа две дуги, разность градусных мер которых равна 90°. Чему равны градусные меры каждой ив дуг?

Решение. Сумма градусных мер дуг равна 360°, а разность равна 90°. Обозначим градусные меры этих дуг x и y. Имеем:

$$\begin{cases} x+y=360, \\ x-y=90. \end{cases}$$

Решая зту систему, получим $x=225°$, $y=135°$.

Пример 2. Сторона квадрата равна 4 см. Вычислить длину окружности: 1) вписанной в него; 2) описанной около него.

Решение. 1) Радиус вписанной в квадрат окружиости равен 2 см, тогда длина окружности равна $C=2\pi R$, т. е. $C=4\pi$ см.

2) Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому $R=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, а длина окружности равна $C=4\sqrt{2}\pi$ см.

§ 6. Решение треугольников

32. Косинус, синус и тангенс. *Косинусом острого угла* прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: $\cos\alpha$. На рисунке 94

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}.$$

Т.1.40. Косинус угла зависит только от градусной меры угла.

Синусом острого угла α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB (рис. 94):

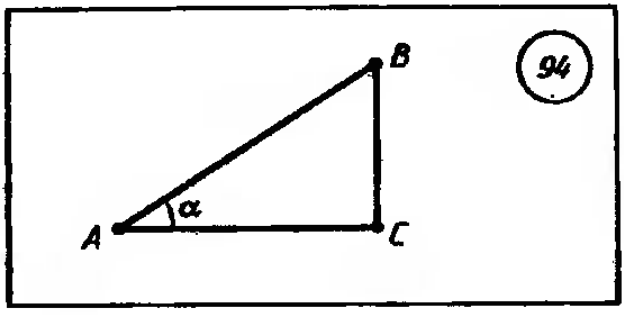
$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему AC (рис. 94):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Синус и тангенс угла, так же как и косинус, зависят только от величины угла.

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу α найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или по значениям $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ найти соответствующий угол. Пояснения, как пользоваться этими таблицами, помещены там же (см.: Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы.— М.: Просвещение, 1988).



Для синуса, косинуса и тангенса углов имеют место следующие тождества:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{1}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{2}$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{3}$$

Значение этих тождеств заключается в том, что они позволяют, зная одну из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$, найти две другие.

Т.1.41. Для любого острого угла α справедливы равенства $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

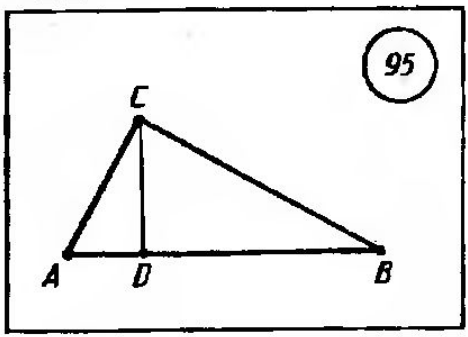
Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов приведены в таблице:

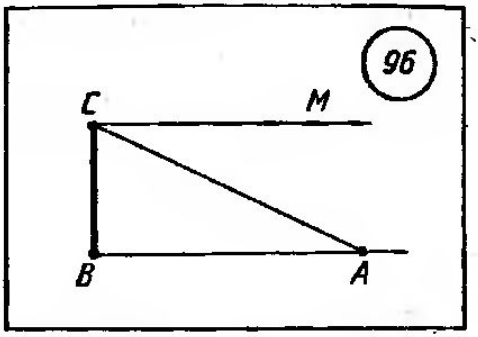
Функция	Аргумент		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Т.1.42. При возрастании острого угла $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают, а $\cos\alpha$ убывает.

Значения синуса, косинуса и тангенса можно определить не только для острых углов, но и для любого угла от 0° до 180° (см. часть I).

Т.1.43. Для любого угла α, $0^\circ<\alpha<180^\circ$, выполняются равенства:
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$,
$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ для $\alpha\neq 90^\circ$.





Пример 1. Записать в порядке возрастания числа $\sin 20°$, $\sin 45°$, $\sin 90°$, $\sin 30°$, $\sin 60°$, $\sin 70°$.

Решение. По теореме 1.42 $\sin\alpha$ $(0°<\alpha<90°)$ возрастает при возрастании α. Поэтому $\sin 20°<\sin 30°<\sin 45°<\sin 60°<\sin 70°<\sin 90°$.

Пример 2. Упростить выражение $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$.

Решение. 1-й способ. $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1=2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

2-й способ. $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1=\sin^2\alpha+1-1=\sin^2\alpha$.

33. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Из определенй $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ получаем следующие правила:

1. Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$.

2. Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$.

3. Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg}\alpha$.

Эти правила позволяют, зная одиу из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны, а зная две стороны, находить острые углы (с помощью специальных таблиц).

4. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

5. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого углв, есть среднее пропорциональиое между проекциями катетов на гипотенузу.

Название *«среднее пропорциональное»* объясняется тем, что число $x=\sqrt{ab}$ является средним членом пропорции $a:x=x:b$.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 95) $\angle C$ прямой,

AD и BD — проекции катетов AC и BC на гипотенузу. Согласно сказанному выше справедливы равенства

$$AC=\sqrt{AB\cdot AD},$$
$$BC=\sqrt{AB\cdot BD},$$
$$CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

Пример. Наблюдатель, находясь на высоте 18 м, заметил под углом понижения в 6°18′ неизвестный объект. Найти расстояние (по горизонтали) от основания наблюдательного пункта до этого объекта.

Решение. По условию задачи $BC=18$ м, $\angle MCA=6°18'$ (рис. 96). Следовательно, $\angle ACB=83°42'$. В $\triangle ABC$ известно, что

$$AB=BC\operatorname{tg}83°42'\approx 18\cdot 9{,}0579;$$
$$AB\approx 163 \text{ м}.$$

34. Теорема косинусов. Теорема синусов.

Т.1.44. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними *(теорема косинусов).*

В $\triangle ABC$ (рис. 97) по теореме косинусов

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha.$$

Из теоремы косинусов вытекает несколько утверждений.

1. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон $\pm$ удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «−», когда угол острый.

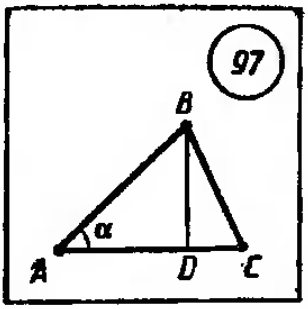
Для случая, изображенного на рисунке 97, можно записать, что

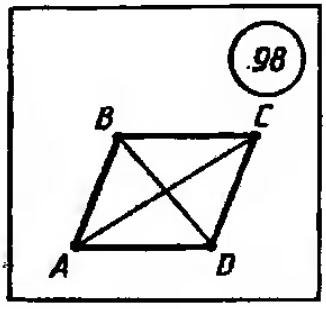
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AD.$$

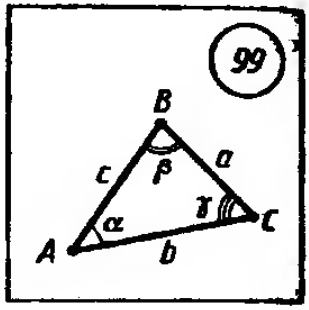
2. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Для параллелограмма, изображенного на рисунке 98, можно записать равенство $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Т.1.45. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов *(теорема синусов).*







В $\triangle ABC$ на рисунке 99 по теореме синусов мы имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Из теоремы синусов следует, что в треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Если в треугольнике ABC (рис. 99) $a<b$, то $\alpha<\beta$; если $\beta>\gamma$, то $b>c$.

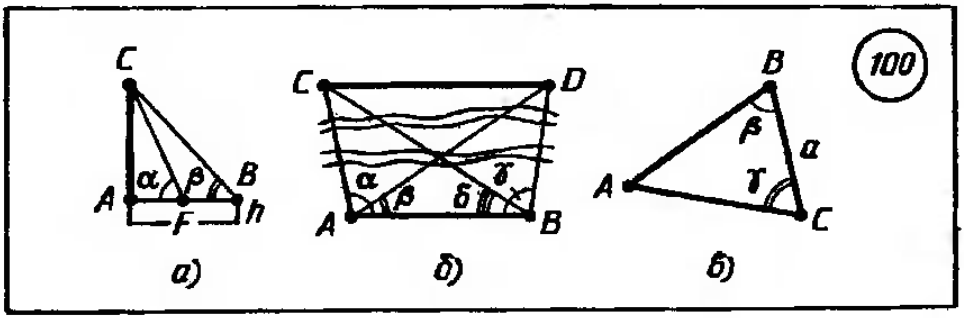
Пример 1. Для измерения высоты предмета AC, основание A которого недоступно (рис. 100,*а*), выбирают некоторые точки F и B на прямой AB и измеряют базис $FB=m$. Из точек F и B измеряют углы α и β, под которыми видна наивысшая точка C этого объекта. Доказать, что $H=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h$, где h — высота угломерного инструмента, $\angle A=90°$.

Решение. $H=AC+h$. Из треугольника CFB по теореме синусов (Т.1.45) $\frac{CF}{\sin\beta}=\frac{m}{\sin(\alpha-\beta)}$, откуда $CF=\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Из треугольника AFC получим $AC=CF\sin\alpha=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Итак, $H=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h$.

Пример 2. По одну сторону реки отмечены две точки A и B. Расстояние $AB=a=3784$ м. Вычислить расстояние



между точками C и D, находящимися на другом берегу реки, если даны $\angle BAC=\alpha$, $\angle BAD=\beta$, $\angle ABC=\delta$, $\angle ABD=\gamma$ (рис. 100,*б*).

Р е ш е н и е. Из $\triangle ACD$ по теореме косинусов (Т.1.44)

$$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos\angle DAC,\ \angle DAC=\alpha-\beta.$$

Из $\triangle ABD$ по теореме синусов (Т.1.45)

$$\frac{AD}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)},\ \text{откуда}\ AD=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin(\alpha+\delta)},\ \text{откуда}\ AC=\frac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

$$CD=a\sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}+\frac{\sin^2\delta}{\sin^2(\alpha+\delta)}-2\frac{\sin\gamma\sin\delta\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\beta+\gamma)}}.$$

35. Решение треугольников. *Решение треугольников* состоит в нахождении неизвестных сторон и углов треугольника по некоторым известным его углам и сторонам. Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы соответственно через α, β, γ.

Перечислим основные задачи на решение треугольников.

З а д а ч а 1. Даны сторона a и два угла треугольника, например β и γ. Найти третий угол и остальные две стороны.

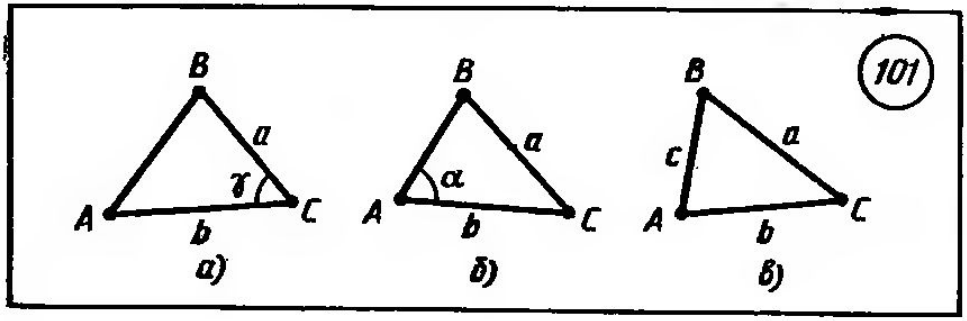
На рисунке 100,*в* в треугольнике ABC дано: $CB=a$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Нужно найти b, c, α.

Р е ш е н и е. α найдем по теореме 1.21, b и c — по теореме 1.45. Задача имеет решение, если $\beta+\gamma<180°$. Единственность решения следует из теоремы 1.16.

З а д а ч а 2. Даны две стороны, например a и b, и угол γ между ними. Найти остальные два угла и третью сторону.

На рисунке 101,*а* в треугольнике ABC дано: $BC=a$, $AC=b$ и $\angle C=\gamma$. Нужно найти c, α и β.

Р е ш е н и е. Сторону c найдем по теореме 1.44, α и β — по



теореме 1.44 или по теореме 1.45. Задача всегда имеет решение. Единственность решения следует из теоремы 1.15.

Задача 3. Даны две стороны, например a и b, и угол, противолежащий одной из них, например α. Найти остальные два угла и третью сторону.

На рисунке 101,*б* в треугольнике ABC дано: $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$. Нужно найти c, β, γ.

Решение. Угол β найдем по теореме 1.45, γ — по теореме 1.21, c — по теореме 1.45. Задача может не иметь решений, иметь одно решение, два решения.

Задача 4. Даны три стороны треугольника. Найти его углы.

На рисунке 101,*б* в треугольнике ABC дано: $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Нужно найти α, β, γ.

Решение. Сначала найдем один из углов α, β или γ по теореме 1.44. Затем будем поступать, как в задаче 2. Задача имеет решение, если бóльшая сторона меньше суммы двух других (п. 15). Единственность решения следует из теоремы 1.17.

§ 7. Площади плоских фигур

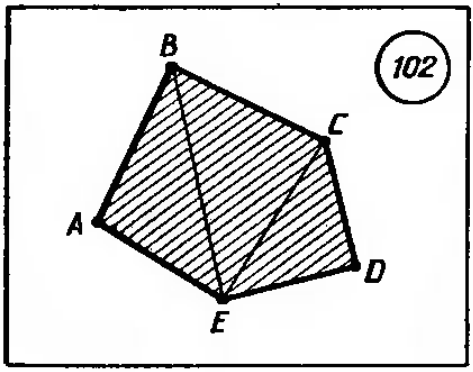
36. Понятие площади простых фигур. На плоскости вводится понятие площади простых фигур.

Фигура называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число треугольников. Треугольник мы понимаем как треугольную область, т. е. конечную часть плоскости, ограниченную треугольником.

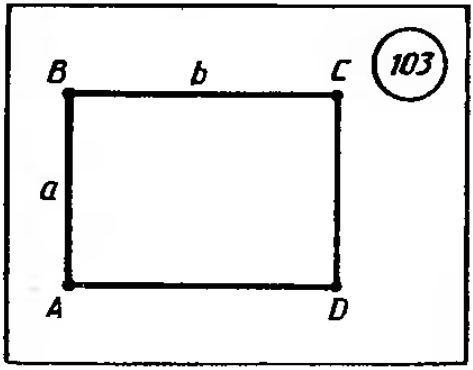
На рисунке 102 изображен выпуклый многоугольник $ABCDE$, который является простой фигурой, так как его можно разбить на треугольники EAB, EBC, ECD.

Площадь простой фигуры — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные фигуры имеют равные площади.



102



103

2. Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.

3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

37. Площади многоугольников. *Площадь прямоугольника* вычисляется по формуле

$$S=ab,$$

где a и b — стороны прямоугольника. На рисунке 103 изображен прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=a$, $BC=b$. Его площадь находится по формуле

$$S=AB\cdot BC.$$

Квадрат есть прямоугольник, у которого стороны равны (см. п. 26), а значит, *площадь квадрата* со стороной a равна a^2, т. е.

$$S=a^2,$$

где a — его сторона. Площадь квадрата можно также вычислить по формуле

$$S=\frac{d^2}{2},$$

где d — диагональ квадрата.

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле

$$S=ah,$$

где a — сторона, h — высота, проведенная к этой стороне. На рисунке 104 изображен параллелограмм $ABCD$, в котором BE — его высота. Площадь параллелограмма равна произведению AB на BE:

$$S=AB\cdot BE.$$

Площадь параллелограмма можно вычислить по формуле

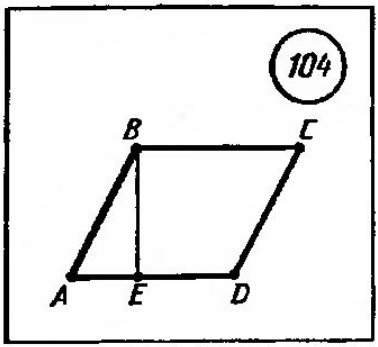
$$S=ab\sin\alpha,$$

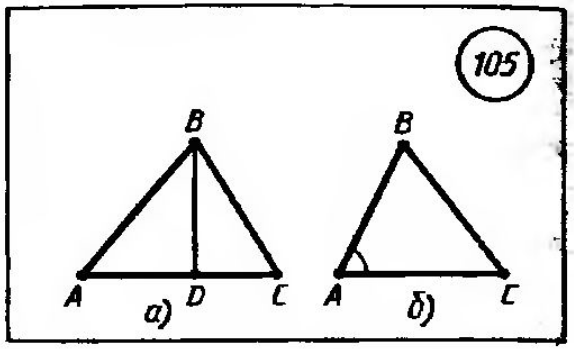
где a и b — стороны, α — угол параллелограмма.

Ромб есть частный случай параллелограмма, следовательно, его площадь можно находить так же, как и площадь параллелограмма. Кроме того, имеются и другие формулы *площади ромба:*

$$S=a^2\sin\alpha,$$

где a — сторона ромба, α — угол ромба;





$$S=\frac{1}{2}d_1d_2,$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

На рисунке 105, *а* изображен треугольник ABC, в котором BD — высота, т. е. площадь его находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

Для нахождения площади треугольника имеются и другие формулы:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где a и b — стороны $\triangle ABC$, а γ — угол между этими сторонами. Иначе эту формулу можно записать так:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A$$ (рис. 105, *б*).

Следующая формула принадлежит Герону, древнегреческому ученому, жившему в I в. н. э. в г. Александрии:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ *(формула Герона),*

где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, т. е. $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, h — высота.

На рисунке 106 изображена трапеция $ABCD$, в которой AB и CD — ее основания, а AE — высота. Площадь этой трапеции находится по формуле

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot AE.$$

Пример 1. Дан параллелограмм $ABCD$ со стороной $AB=12$ см и диагональю $AC=16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Вычислить расстояние от точки D до прямой AB.

Решение. $S_{ABCD}=2S_{\triangle ADC}=AC\cdot DM=64$ см^2 (рис. 107), а так как $S_{ABCD}=AB\cdot DK$, то $DK=\frac{64}{12}$, т. е. $DK\approx 5{,}33$ см.

Пример 2. Через центр O квадрата $ABCD$ со стороной a проведена прямая l, пересекающая сторону AB, но не проходящая через точки A и B. Выразить сумму расстояний от вершин B и C квадрата до прямой l через a и b, если b — длина отрезка прямой l, заключенного внутри квадрата.

Решение. Обозначим искомую сумму через c, тогда в силу центральной симметрии фигуры $c=2(h_1+h_2)$ (рис. 108).

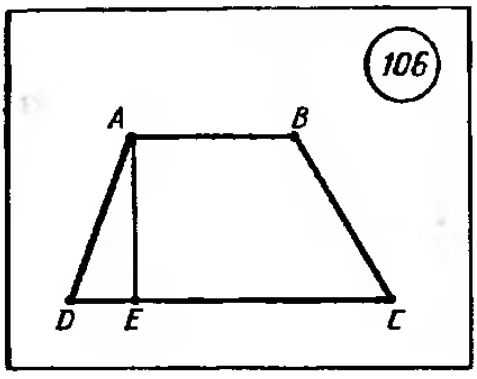
$$S_{\triangle AOB}=0{,}25a^2,\ S_{\triangle AOB}=0{,}25b(h_1+h_2),$$

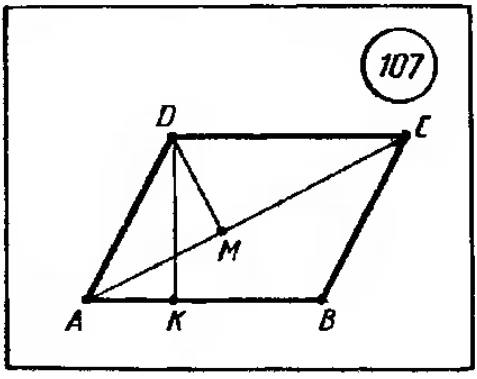
откуда $0{,}25a^2=0{,}25b(h_1+h_2)$ и $c=\frac{2a^2}{b}$.

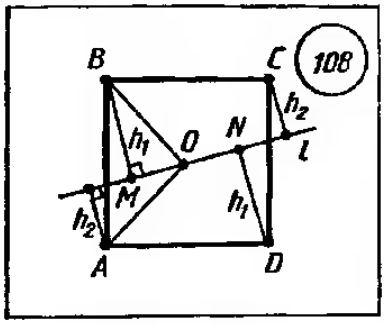
38. Площади подобных фигур.

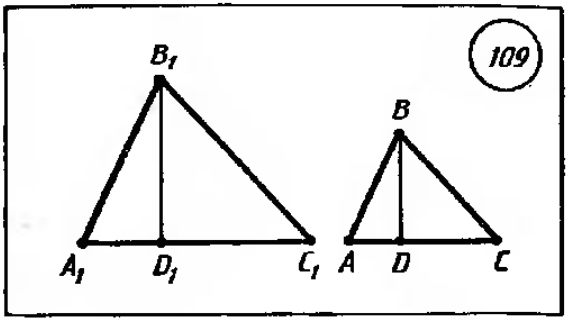
Т.1.46. | **Площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.**

Пусть даны два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 109). Если коэффициент подобия $k>1$, то линейные размеры треугольника $A_1B_1C_1$ в k раз больше соответствующих раз-









меров треугольника ABC. В частности, сторона и высота $\triangle A_1B_1C_1$ в k раз больше соответствующих сторон и высот $\triangle ABC$, т. е. $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$, $B_1D_1 = kBD$.

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2} kAC kBD = \frac{1}{2} k^2 AC \cdot BD = k^2 S_{\triangle ABC}.$$

39. Площадь круга. Формулы площади правильного многоугольника, описанного около круга (рис. 110), и правильного многоугольника, вписанного в круг (рис. 111), позволяют вывести формулу площади круга, радиус которого R.

Площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2,$$

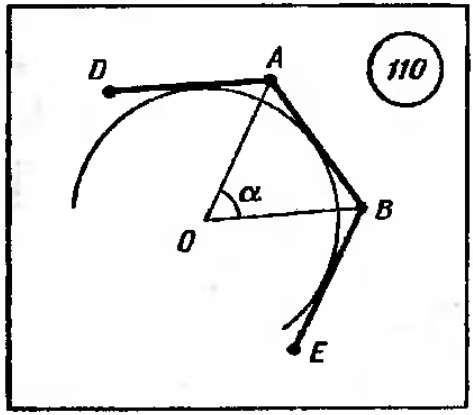
где R — радиус круга.

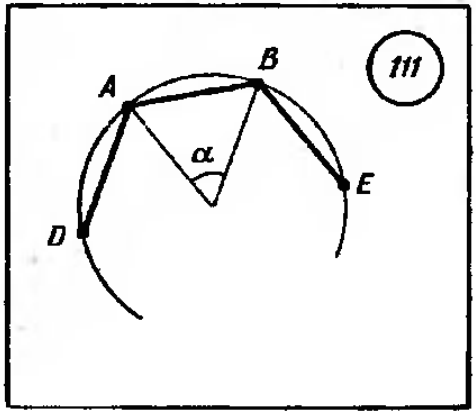
Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 112).

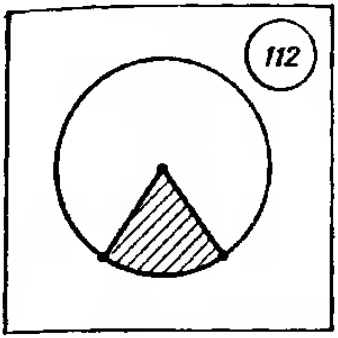
Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

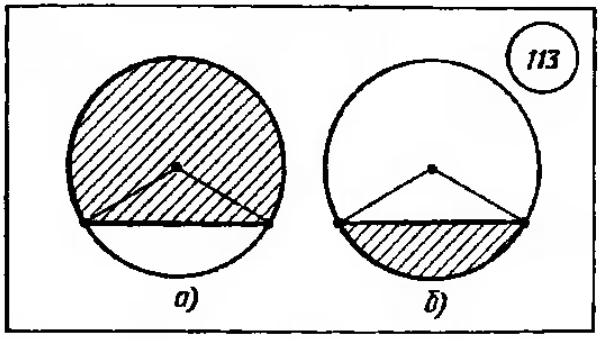
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha,$$

где R — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.









Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга (рис. 113).

Площадь кругового сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha\pm S_{\triangle},$$

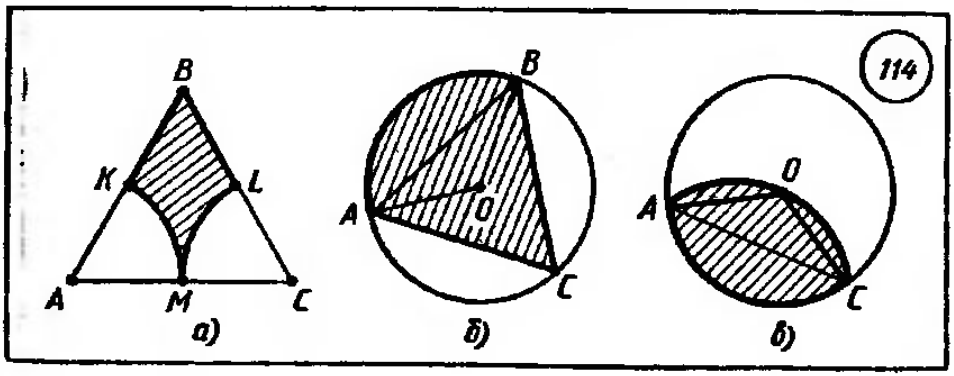
где R — радиус круга, α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_{\triangle}$ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «+» надо брать, если $\alpha>130°$ (рис. 113, *а*), а знак «—», если $\alpha<180°$ (рис. 113, *б*).

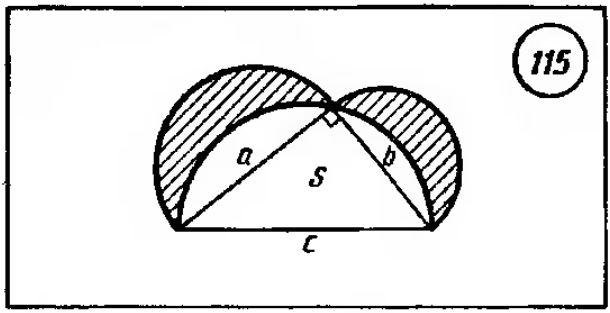
Пример 1. Произвести необходимые измерения и вычислить площади фигур, изображенных на рисунке 114.

Решение. а) $\triangle ABC$ правильный (рис. 114, *а*), точки K и L — середины его сторон, AKM и CML — секторы, дуга каждого из которых содержит 60°. Поэтому

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{12}=\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\approx 0{,}17a^2,$$

где a — сторона $\triangle ABC$.





Например, при $a \approx 16$ мм, $S \approx 44$ мм^2.

б) Считая, что AOB — сектор с углом 120°, O — центр окружности (рис. 114, *б*), получим:

$$S = \frac{\pi R^2}{3} + R^2 \sin 120^\circ = \frac{R^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1{,}9R^2,$$

где R — радиус окружности.

Например, при $D \approx 16$ мм, $S \approx 122$ мм^2.

в) Считая, что дуга AOC (рис. 114, *в*) проходит через центр окружности O, а ее радиус равен радиусу окружности и $\angle AOC = 120^\circ$, получим:

$$S = 2\left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ\right) \approx 1{,}2R^2,$$

где R — радиус окружности.

Например, при $D \approx 16$ мм, $S \approx 77$ мм^2.

Пример 2. Доказать, что сумма площадей двух заштрихованных луночек (рис. 115) равна площади прямоугольного треугольника ABC.

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника ABC через a и b, гипотенузу через c (рис. 115), а сумму площадей заштрихованных фигур через S.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, т. е. $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

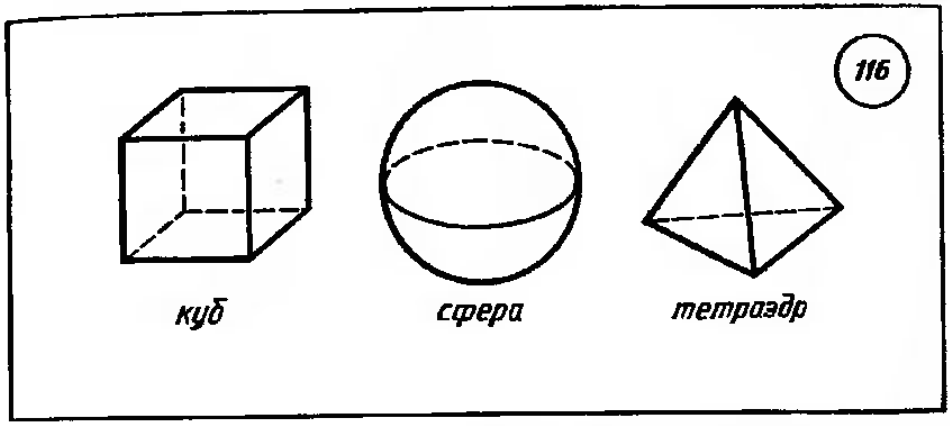
$$S = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \left(\frac{\pi c^2}{8} - S_{\triangle ABC}\right) = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC},$$

$$S = S_{\triangle ABC}.$$

ГЛАВА II. Прямые и плоскости в пространстве

§ 8. Аксиомы стереометрии и некоторые следствия из них

40. Основные понятия стереометрии. *Основными геометрическими фигурами в пространстве* являются *точка, прямая* и *плоскость*. На рисунке 116 изображены различные фигуры в



пространстве. Объединение нескольких геометрических фигур в пространстве есть тоже геометрическая фигура, на рисунке 117 фигура состоит из двух тетраэдров.

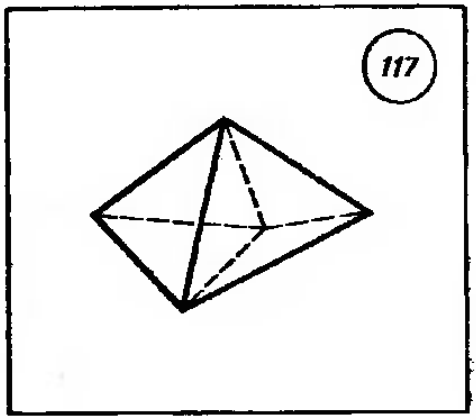
Плоскости обозначаются строчными греческими буквами:

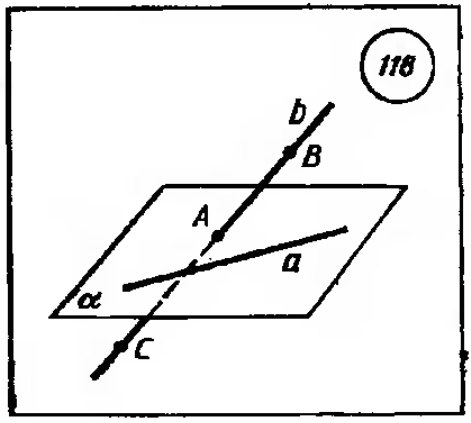
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ .$$

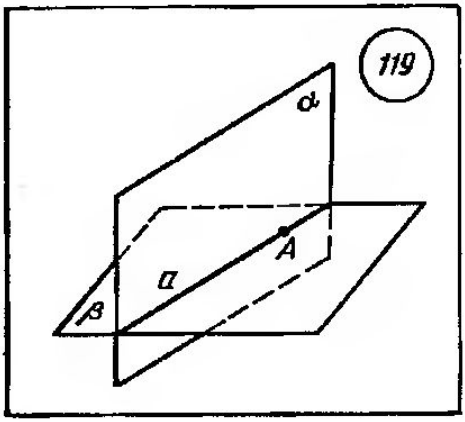
На рисунке 118 изображены плоскость α, прямые a и b и точки A, B и C. Про точку A и прямую a говорят, что они *лежат в плоскости* α или *принадлежат* ей. Про точки B и C и прямую b, что они *не лежат в плоскости* α или *не принадлежат* ей.

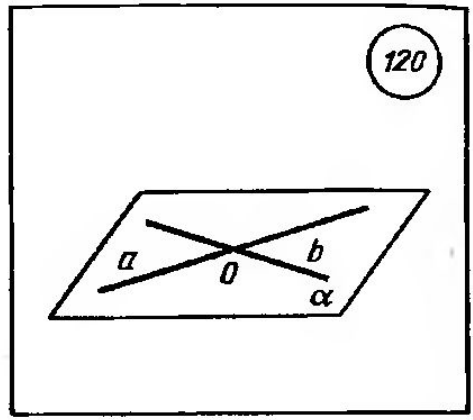
Введение основной геометрической фигуры — плоскости заставляет расширить систему аксиом. Перечислим аксиомы, которые выражают *основные свойства плоскостей в пространстве*. Эти аксиомы обозначены в пособии буквой C.

C_1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.









На рисунке 118 точка A принадлежит плоскости α, а точки B и C не принадлежат ей.

C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

На рисунке 119 две различные плоскости α и β имеют общую точку A, а значит, по аксиоме C_2 существует прямая, принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если какая-либо точка принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой a. Плоскости α и β в этом случае называются *пересекающимися* по прямой a.

C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

На рисунке 120 изображены две различные прямые a и b, имеющие общую точку O, а значит, по аксиоме C_3 существует плоскость α, содержащая прямые a и b. При этом по той же аксиоме C_3 плоскость α единственная.

Эти три аксиомы дополняют рассмотренные в главе I аксиомы планиметрии. Все они вместе являются системой аксиом геометрии.

Пользуясь этими аксиомами, можно доказать несколько первых теорем стереометрии.

Т.2.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Т.2.2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости

Т.2.3. | **Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**

Пример 1. Дана плоскость α. Доказать, что существует прямая, не лежащая в плоскости α и пересекающая ее.

Решение. Возьмем в плоскостн α точку A, что можно сделать по аксиоме C_1. По той же аксиоме существует точка B, которая плоскости α не принадлежнт. Через точки A и B можно провести прямую (аксиома А — I_2). Прямая AB не лежит в плоскости α и пересекает ее (в точке A).

Пример 2. Дана плоскость α. Доказать, что существует другая плоскость β, пересекающая α.

Решение. Возьмем точки A и B, принадлежащие плоскости α, и точку C, не принадлежащую ей (аксиома C_1). Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Через них по теореме 2.3 можно провести плоскость β, и притом только одну. Плоскости α и β имеют общую точку, а значит, по аксиоме C_2 плоскости α и β пересекаются.

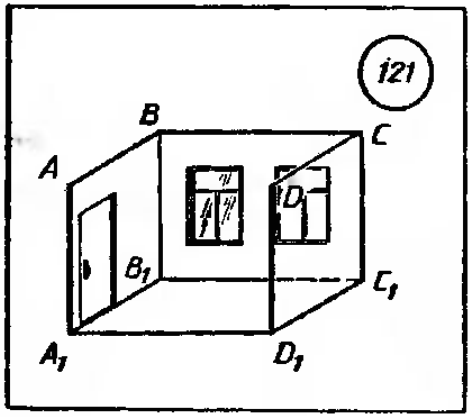
Замечание. Если допустить, что точка C лежит на прямой AB, то по теореме 2.2 она будет лежать и в плоскости α, что противоречит выбору точки C.

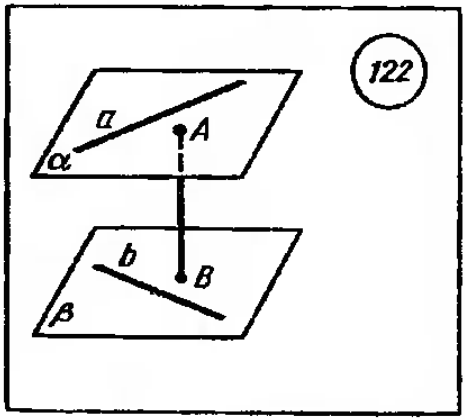
§ 9. Параллельность прямых и плоскостей

41. Скрещивающиеся прямые. Определение параллельных прямых и их свойства в пространстве такие же, как и на плоскости (см. п. 11).

Вместе с тем в пространстве возможен еще один случай расположения прямых — *скрещивающиеся прямые*. Прямые, которые ие пересекаются и ие лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися.

На рисунке 121 изображен макет жилой комнаты. Вы видите, что прямые, которым принадлежат отрезки AB и B_1C_1, BC и D_1C_1, являются скрещивающимися.





Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми. Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.

Градусная мера угла между параллельными прямыми считается равной нулю.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них. Можно доказать, что две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Таким образом, для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 122) нужно провести через каждую из этих прямых параллельные плоскости α и β. Расстояние между этими плоскостями и будет расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b. На рисунке 122 этим расстоянием является, например, расстояние AB.

Пример. Прямые a и b параллельны, а прямые c и d скрещиваются. Может ли каждая из прямых a и b пересекать обе прямые c и d?

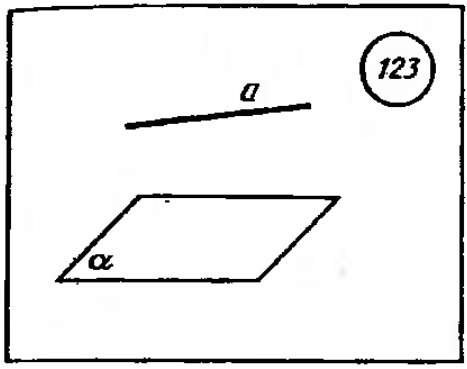
Решение. Прямые a и b лежат в одиой плоскости, и поэтому любая прямая, пересекающая каждую из них, лежит в той же плоскости. Следовательно, если бы каждая из прямых a, b пересекала обе прямые c и d, то прямые c и d лежали бы в одной плоскости с прямыми a и b, а этого быть не может, так как прямые c и d скрещиваются.

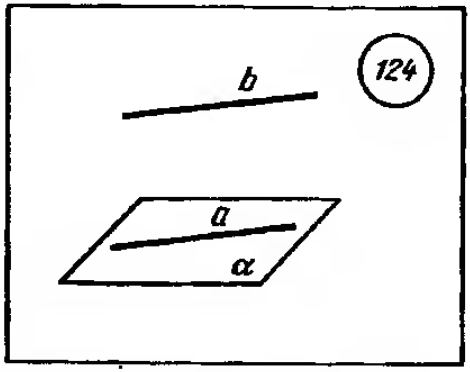
42. Параллельность прямой и илоскости. Прямая и плоскость называются *параллельными,* если они не пересекаются, т. е. не имеют общих точек. Если прямая a параллельна плоскости α, то пишут: $a \parallel \alpha$.

На рисунке 123 изображена прямая a, параллельная плоскости α.

Т.2.4. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости *(признак параллельности прямой и плоскости).*

Эта теорема позволяет в конкретной ситуации доказать, что прямая и плоскость являются параллельными. На рисунке 124 изображена прямая b, параллельная прямой a, лежащей в плоскости α, т. е. по Т.2.4 прямая b параллельна плоскости α, т. е. $b \parallel \alpha$.





Пример. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC параллельно гипотенузе на расстоянии 10 см от нее проведена плоскость. Проекции катетов на эту плоскость равны 30 и 50 см. Найти проекцию гипотенузы на ту же плоскость.

Решение. Из прямоугольных треугольников BB_1C и AA_1C (рис. 125) находим:

$$BC=\sqrt{10^2+30^2}=\sqrt{1000};\ AC=\sqrt{10^2+50^2}=\sqrt{2600}.$$

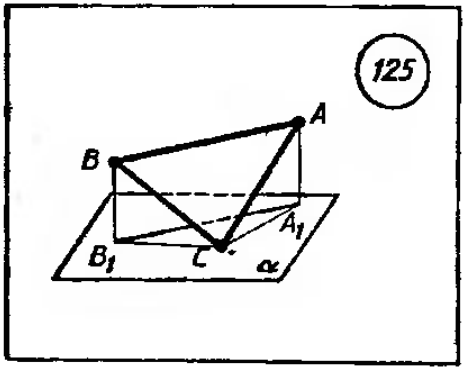
Из треугольника ABC находим:

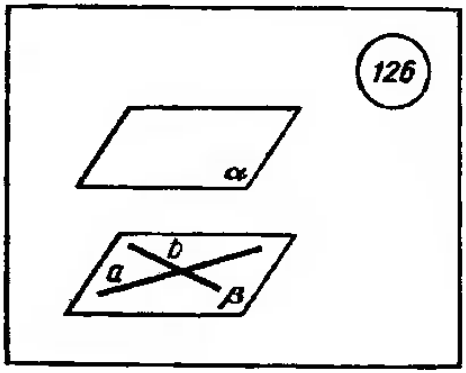
$$AB=\sqrt{1000+2600}=60.$$

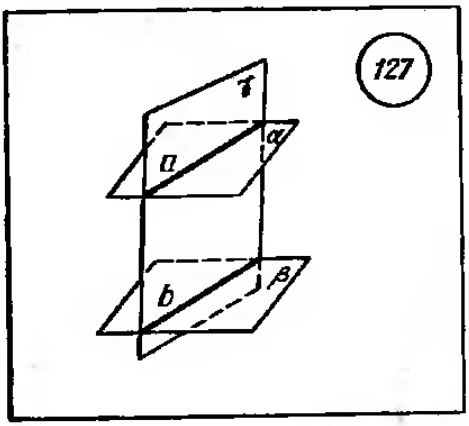
Проекция гипотенузы AB на плоскость α равна A_1B_1. Так как AB параллельна плоскости α, то $AB=A_1B_1$. Итак, $A_1B_1=60$ см.

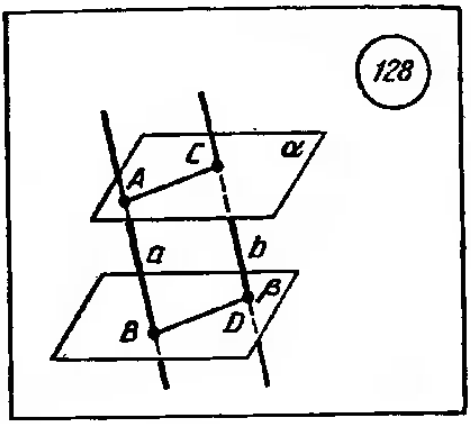
43. Параллельные плоскости. Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Т.2.5. Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости *(признак параллельности двух плоскостей)*.









На рисунке 126 плоскость α параллельна пересекающимся прямым a и b, лежащим в плоскости β, тогда по Т.2.5 эти плоскости параллельны.

Т.2.6. | Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Т.2.7. | Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

На рисунке 127 изображены две параллельные плоскости α и β, а плоскость γ их пересекает по прямым a и b. Тогда по теореме 2.7 можно утверждать, что прямые a и b параллельны.

Т.2.8. | Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

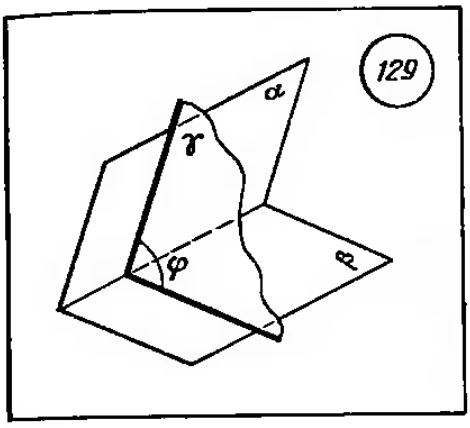
По Т.2.8 отрезки AB и CD, изображенные на рисунке 128, равны, так как $\alpha \parallel \beta$ и $a \parallel b$.

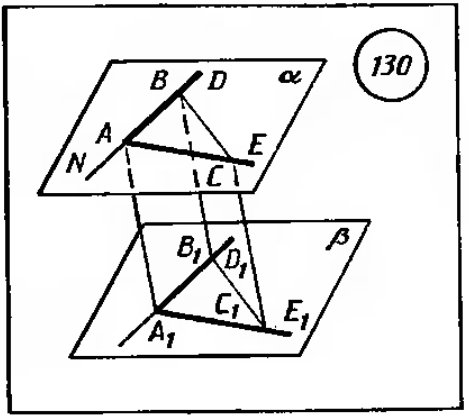
Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между* данными *плоскостями* (рис. 129). Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости.

Градусная мера угла между параллельными плоскостями считается равной нулю.

Пример 1. Доказать, что углы с соответственно параллельными сторонами или равны между собой, или в сумме составляют два прямых угла.

Решение. На сторонах углов DAE и $D_1A_1E_1$ отложим





$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 соединим отрезками AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 130). Четырехугольник ABB_1A_1 — параллелограмм, так как у него стороны AB и A_1B_1 равны и параллельны. То же самое можно сказать и о четырехугольнике ACC_1A_1. Из сказанного следует, что BB_1 равно и параллельно AA_1, а AA_1 равно и параллельно CC_1, откуда BB_1 и CC_1 равны и параллельны, следовательно, BCC_1B_1 — параллелограмм, поэтому $BC=B_1C_1$.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Они равны по трем соответственно равным сторонам (Т. 1.17). Отсюда следует, что $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Далее, $\angle NAC+\angle BAC=2d$ как сумма смежных углов. Заменяя $\angle BAC$ равным ему $\angle B_1A_1C_1$, получим $\angle NAC+\angle B_1A_1C_1=2d$.

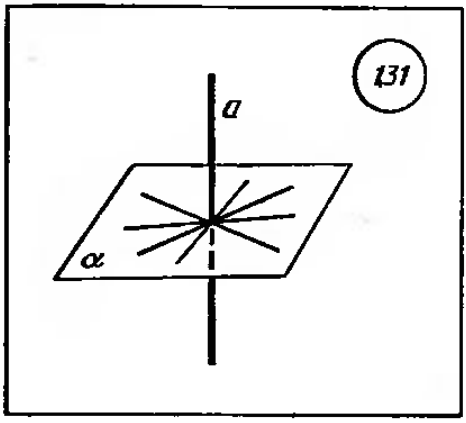
§ 10. Перпендикулярность прямых и плоскостей

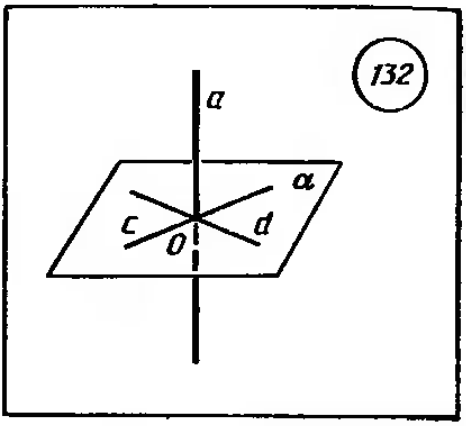
44. Перпендикулярность прямой и плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

На рисунке 131 изображена прямая a, перпендикулярная плоскости α.

Т.2.9. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

Эту теорему называют *признаком перпендикулярности прямой и плоскости* или *теоремой о двух перпендикулярах*.





На рисунке 132 изображена прямая a, перпендикулярная прямым c и d, проходящим через точку пересечения плоскости α и прямой a и лежащим в плоскости α. По Т.2.9 можно утверждать, что $a \perp \alpha$.

В следующих двух теоремах говорится о взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

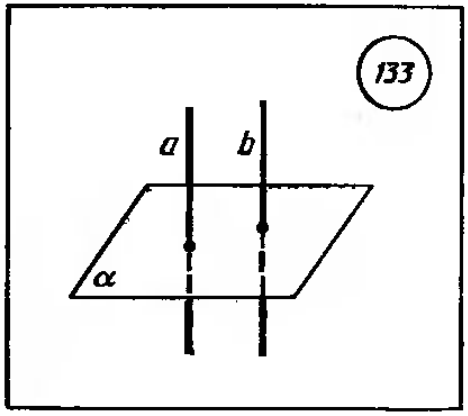
Т.2.10. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

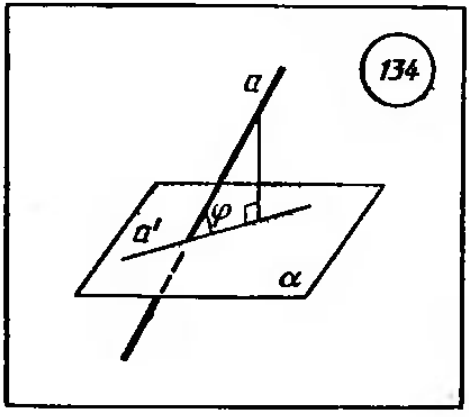
Т. 2.11. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

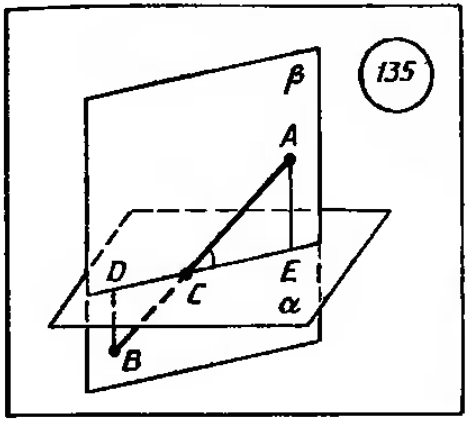
На рисунке 133 изображены такие прямые a и b и плоскость α, о которых говорится в теоремах 2.10 и 2.11.

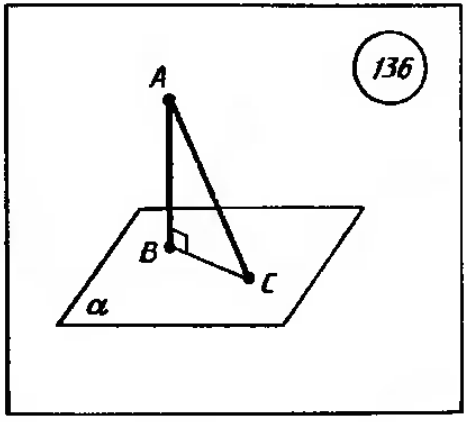
Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

На рисунке 134 изображены плоскость α и прямая a, ко-









торая ее пересекает. Прямая a' есть *проекция прямой a на плоскость* α. Тогда угол φ есть *угол между прямой a и плоскостью* α. Угол между параллельными прямой и плоскостью считается равным нулю, а угол между перпендикулярными прямой и плоскостью — равным 90°. Так как прямая a, ее проекция a' на плоскость α и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой a лежат в одной плоскости, то угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.

Пример. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость, причем концы его находятся на расстоянии 3 и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

Решение. Опускаем из точки A (рис. 135) перпендикуляр AE на плоскость α. Через две пересекающиеся прямые CA и CE проводим плоскость β, которая пересечет плоскость α по прямой ED. Опускаем в плоскости β перпендикуляр на прямую DE. Получаем $\triangle ACE \backsim \triangle BCD$ (докажите самостоятельно). По условию $AB=10$ см, поэтому $BC=10-AC$ и $\frac{3}{AC}=\frac{2}{10-AC}$, $30-3AC=2AC$, $AC=6$.

Итак, в $\triangle ACE$ катет $AE=3$ см, т. е. равен половине гипотенузы $AC=6$ см, следовательно, он лежит против угла 30°, откуда $\angle ACE=30°$.

45. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. *Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость,* называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра. Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

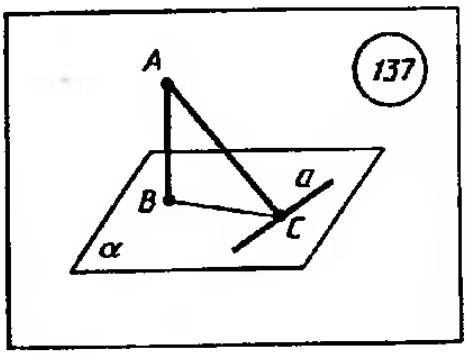
На рисунке 136 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

Так как расстояния от точек прямой до параллельной ей плоскости одинаковы, то *расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости* называется расстояние от любой ее точки до этой плоскости.

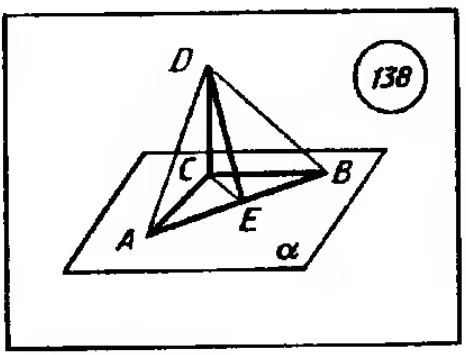
Т. 2.12. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной *(теорема о трех перпендикулярах)*.

На рисунке 137 к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонная AC. Прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна BC — проекции наклонной AC на плоскость α. По Т. 2.12 прямая a перпендикулярна наклонной AC. Если было бы известно, что прямая a перпендикулярна наклонной AC, то по Т. 2.12 она была бы перпендикулярна и ее проекции — BC.

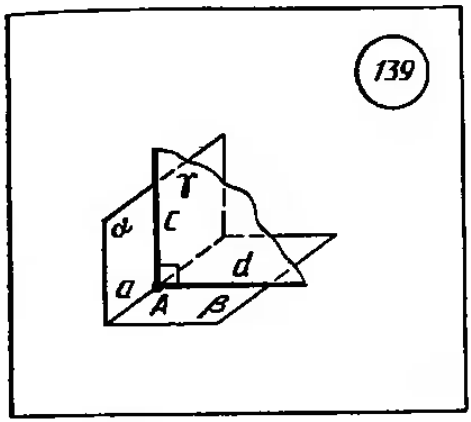
Пример. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20 м. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр $CD = 35$ м (рис. 138). Найти расстояние от точки D до гипотенузы AB.

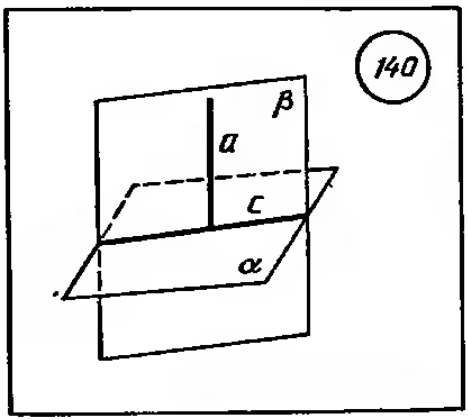


137



138





Р е ш е н и е. Проведем $DE \perp AB$. По условию DC — перпендикуляр к плоскости, т. е. DE — наклонная, CE — ее проекция, поэтому по теореме о трех перпендикулярах из условия $DE \perp AB$ следует, что $CE \perp AB$.

Из $\triangle ABC$ находим $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625}$, т. е. $AB = 25$ м. Для отыскання высоты CE в $\triangle ABC$ находим $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 150$ м^2.

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CE}{2}$, откуда $CE = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$, т. е. $CE = 12$ м.

Из $\triangle DCE$ по теореме Пифагора

$$DE = \sqrt{DC^2 + CE^2}, \text{ т. е. } DE = 37 \text{ м}.$$

46. Перпендикулярность плоскостей. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными,* если какая-либо плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

На рисунке 139 изображены две плоскости α и β, которые пересекаются по прямой a. Плоскость γ перпендикулярна прямой a и пересекает α и β. При этом плоскость γ пересекает плоскость α по прямой c, а плоскость β — по прямой d, причем $c \perp d$, т. е. по определению $\alpha \perp \beta$.

Т. 2.13. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскостн, то эти плоскости перпендикулярны *(признак перпендикулярности плоскостей).*

На рнсунке 140 плоскость β проходит через прямую $a \perp \alpha$, т. е. по Т. 2.13 плоскости β н α перпенднкулярны.

Т. 2.14. | **Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.**

Пример. Треугольник ABC с прямым углом ACB и катетом AC, принадлежащим плоскости α, образует с этой плоскостью двугранный угол, равный 45°. Найти расстояние от вершины B до плоскости α, если $AC=20$ см и $AB:BC=3:1$ (рис. 141).

Решение. По условию $AB:BC=3:1$, $AC=20$ см, поэтому, обозначив $BC=x$, $AB=3x$, по теореме Пифагора из $\triangle ABC$ получим $(3x)^2=20^2+x^2$, откуда $x^2=50$, т. е. $BC^2=50$.

Из точки B проведем $BE\perp\alpha$ (рис. 141), соединим E и C. По теореме о трех перпендикулярах $AC\perp CE$, так как $AC\perp BC$. Следовательно, $\angle BCE$ — линейный угол двугранного угла (п. 48), равного по условию 45°. В $\triangle CBE$ имеем $\angle BCE=45°$, $\angle BEC=90°$, поэтому $BE=CE$, т. е. $2BE^2=BC^2$ (по теореме Пифагора), откуда $2BE^2=50$, $BE=5$ см.

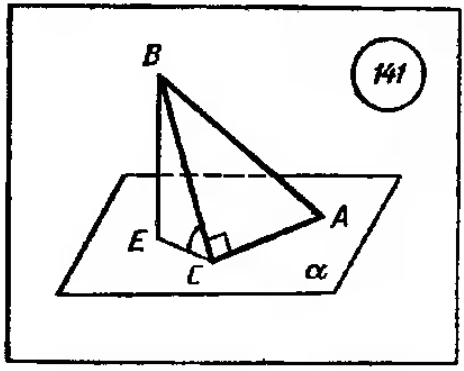
ГЛАВА III. ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

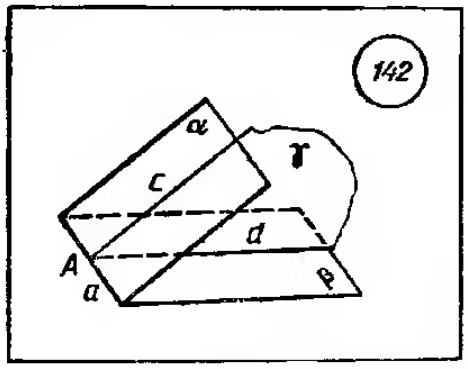
§ 11. Многогранники

47. Тело и его поверхность. Изучая многоугольники, говорят о плоском многоугольнике, понимая под ним сам многоугольник и его внутреннюю область.

То же самое происходит и в стереометрии. По аналогии с понятием плоского многоугольника вводится понятие тела и его поверхности.

Точка геометрической фигуры называется *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий этой фигуре. Фигура называется *областью*, если все





ее точки внутренние и если любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре.

Точка пространства называется *граничной* точкой данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Граничные точки области образуют *границу* области.

Телом называется конечная область вместе с ее границей. Граница тела называется *поверхностью тела*. Тело называется *простым*, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Телом вращения в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой. Цилиндр, конус, шар являются примерами тел вращения.

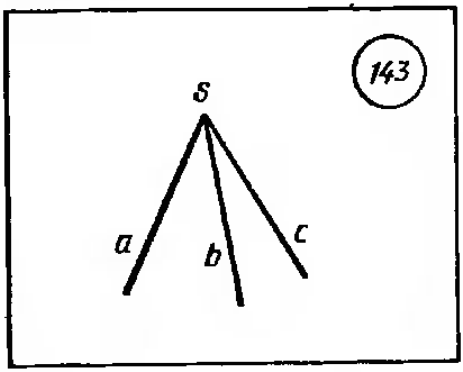
48. Многогранные углы. Многогранники. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла.

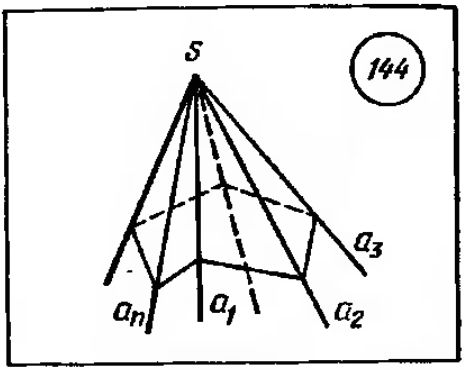
На рисунке 142 изображен двугранный угол с ребром a и гранями α и β.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом* двугранного угла. За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Если через точку A ребра a двугранного угла провести плоскость γ, перпендикулярную этому ребру, то она пересечет плоскости α и β по полупрямым c и d (рис. 142); $\angle(cd)$ — линейный угол данного двугранного угла. Градусная мера этого линейного угла является градусной мерой двугранного угла. Мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) (рис. 143). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, образуемые гранями и их продолжениями, называются двугранными углами трехгранного угла.

Аналогично определяется понятие *многогранного угла* $(a_1a_2a_3 \ldots a_n)$ как фигуры, составленной из плоских углов (a_1a_2), (a_2a_3), ..., (a_na_1) (рис. 144). Для многогранного угла определяются понятия граней, ребер и двугранных углов так же, как и для трехгранного угла.



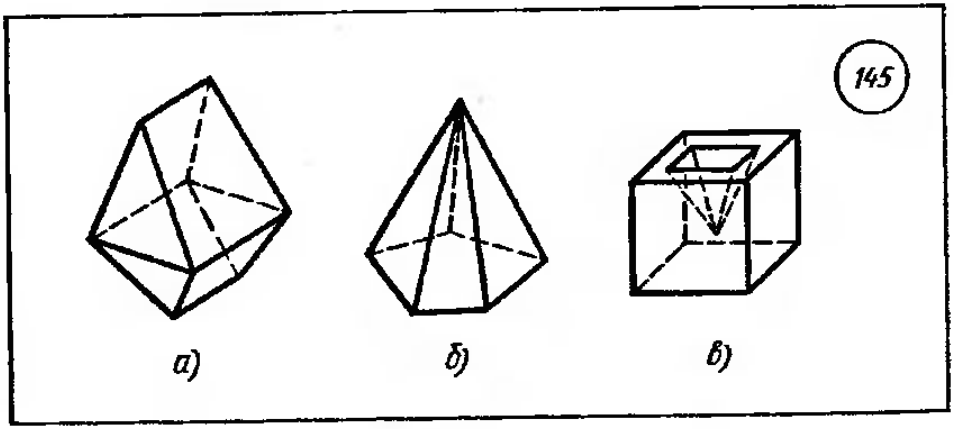


Многогранником называют тело, поверхность которого состонт из конечного числа плоских многоугольников (рис. 145).

Многогранник называется *выпуклым,* если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности (рнс. 145, *а, б*). Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется *гранью.* Грани выпуклого многогранника — выпуклые многоугольники. Стороны граней называются *ребрами* многогранника, а вершины — *вершинами* многогранника.

49. Призма. Параллелепипед. Куб. *Призмой* называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники называются *основаниями* призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины,— *боковыми ребрами* призмы (рис. 146).

Так как параллельный перенос есть движение, то основания призмы равны. Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то



у призмы основания лежат в параллельных плоскостях. Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то у призмы боковые ребра параллельны и равны.

На рисунке 147, *а* изображена четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоские многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются соответствующим параллельным переносом и являются основаниями призмы, а отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 являются боковыми ребрами призмы. Основания призмы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны (параллельный перенос есть движение и переводит фигуру в равную ей фигуру, п. 79). Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны и равны.

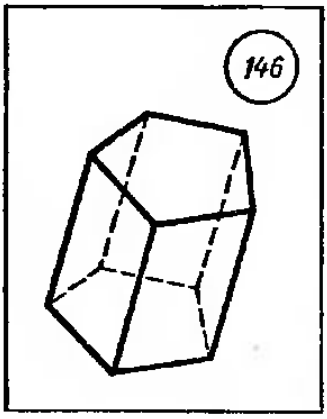
Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. *Боковая поверхность* состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие — соседними боковыми ребрами призмы.

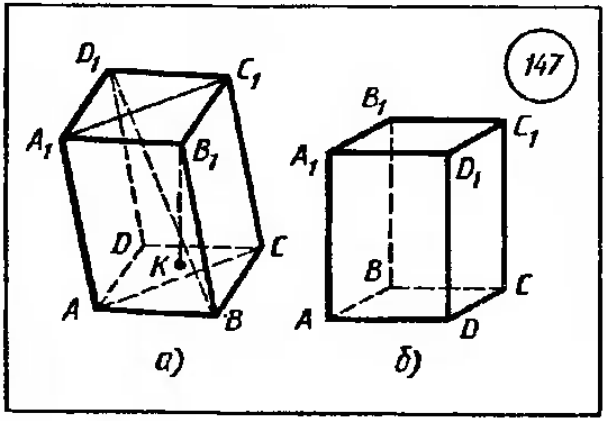
На рисунке 147, *а* боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов ABB_1A_1, BCC_1B_1, ADD_1A_1, DCC_1D_1. *Полная поверхность* состоит из оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и указанных выше параллелограммов.

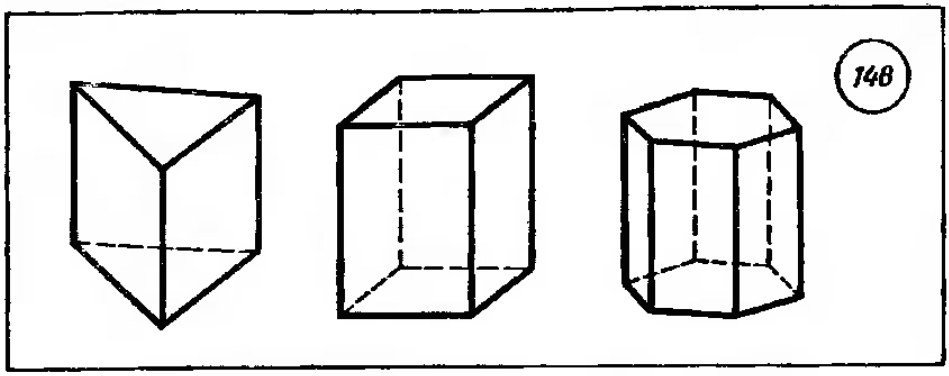
Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* призмы. *Диагональным сечением* призмы называется сечение ее плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

На рисунке 147, *а* изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, B_1K — ее высота, D_1B — одна из ее диагоналей. Сечение ACC_1A_1 является одним из диагональных сечений этой призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется







148

наклонной. Прямая призма называется *правильной,* если ее основаниями являются правильные многоугольники.

На рисунке 147, *а* изображена наклонная призма, а на рисунке 147, *б* — прямая, здесь ребро AA_1 перпендикулярно основаниям призмы. На рисунке 148 изображены правильные призмы, у них основаниями являются соответственно правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник.

Если основания призмы — параллелограммы, то она называется *параллелепипедом.* У параллелепипеда все грани — параллелограммы. На рисунке 147, *а* изображен наклонный параллелепипед, а на рисунке 147, *б* — прямой.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими.* На рисуике 147, *а* грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1 противолежащие.

Можно доказать некоторые *свойства параллелепипеда.*

Т.3.1. | У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.

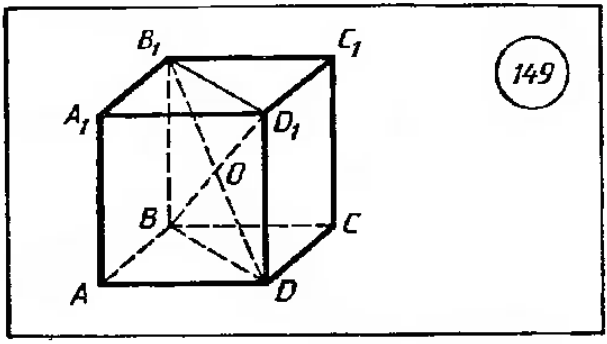
Т.3.2. | Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его *центром симметрии.*

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным* параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом.*

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами* или *измерениями.* У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.



Для прямоугольного параллелепипеда верна такая теорема:

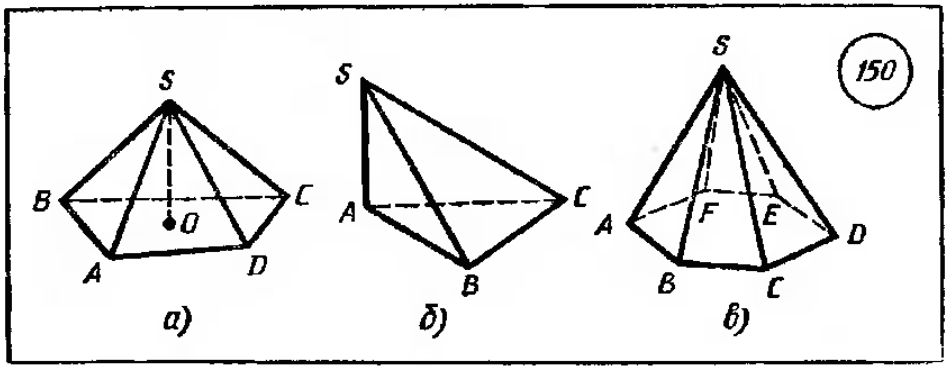
Т.3.3. | **В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров.**

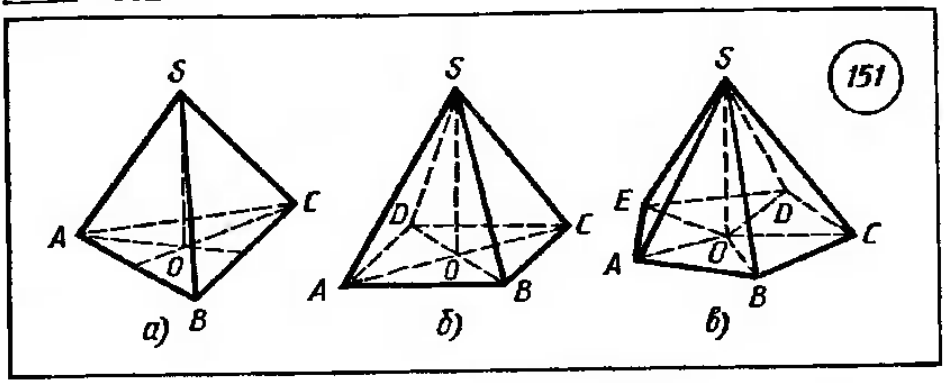
Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 149) с ребром a диагонали равны: $B_1D = BD_1 = AC_1 = A_1C = a\sqrt{3}$.

50. Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — *основания* пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания,— *вершины* пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания (рис. 150). Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами*. На рисунке 150, *а* изображена пирамида $SABCD$. Четырехугольник $ABCD$ — основание пирамиды, точка S — вершина пирамиды, отрезки SA, SB, SC и SD — ребра пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. На рисунке 150, *а* SO — высота пирамиды.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием явля-





ется n-угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*.

На рисунке 151, *а* изображена треугольная пирамида, или тетраэдр, на рисунке 151, *б* — четырехугольная, на рисунке 151, *в* — шестиугольная.

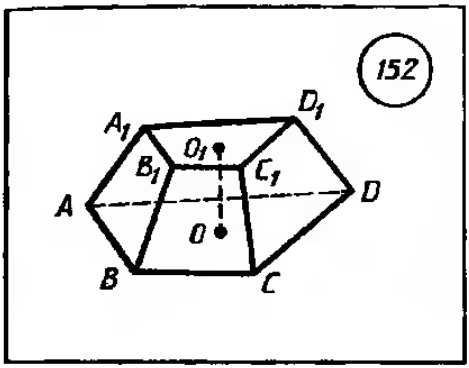
Т.3.4. | Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.

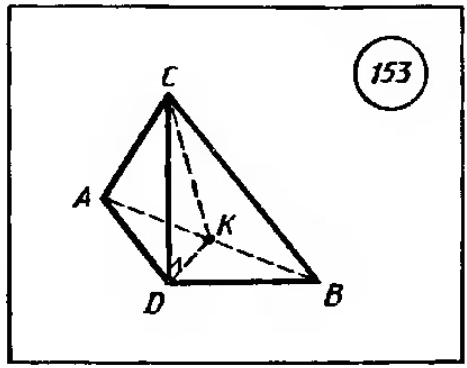
Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. На рисунке 151 изображены правильные пирамиды. У правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*.

По Т.3.4 плоскость α, параллельная плоскости β основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть пирамиды представляет собой многогранник, который называется *усеченной пирамидой*. Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях α и β, называются *основаниями* усеченной пирамиды, остальные грани называются *боковыми гранями*. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции. На рисунке 152 изображена усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции, их высоты называются *апофемами*.

Пример. В тетраэдре $ABCD$ ребро $CD \perp AD$, $CD \perp BD$, двугранный угол при ребре $CD=1$ равен 120°, а $AD=BD=\sqrt{2}$. Найти величину двугранного угла при ребре AB.





Решение. Пусть K — середина ребра AB (рис. 153). Отрезок CD перпендикулярен двум пересекающимся прямым BD и AD плоскости ABD, а значит, по Т.2.9 ребро CD перпендикулярно плоскости ABD, откуда $\angle ADB=120°$. KD — медиана равнобедренного треугольника ADB, а значит, и его высота, $KD\perp AB$. Следовательно, $KC\perp AB$ по Т.2.12, а тогда $\angle CKD$ — линейный угол двугранного угла при ребре AB. Нетрудно найти его величину (сделайте это самостоятельно). **Ответ:** $\angle CKD=45°$.

51. Правильные многогранники. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 154): *правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр*. Про правильный тетраэдр и куб сказано раньше (п. 49, 50). В каждой вершине правильного тетраэдра и куба сходятся три ребра.

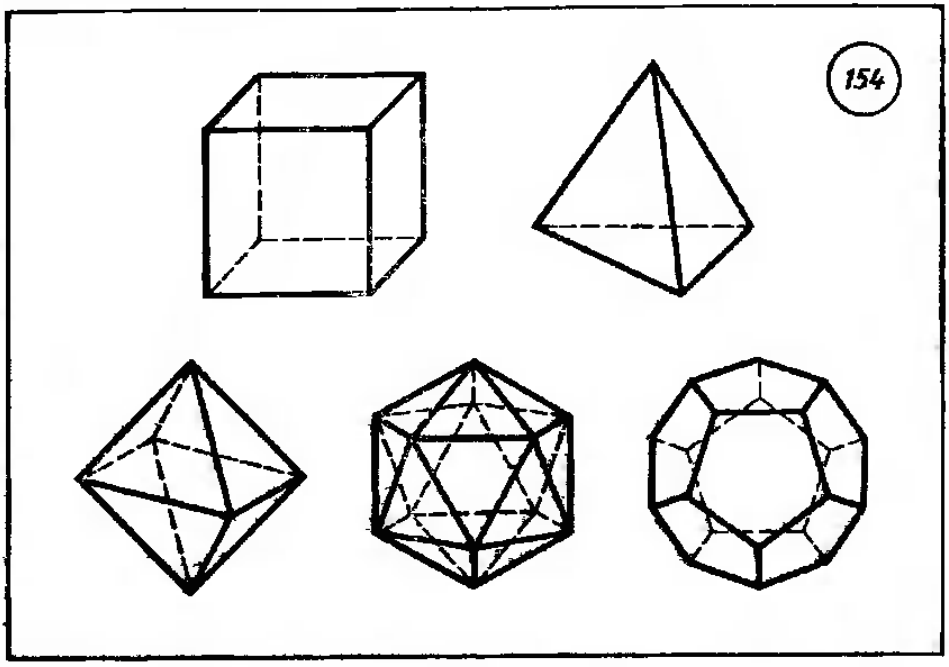
Грани октаэдра — правильные треугольники. В каждой его вершине сходятся по четыре ребра.

Грани додекаэдра — правильные пятиугольники. В каждой вершине сходятся по три ребра.

Грани икосаэдра — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

§ 12. Тела вращения

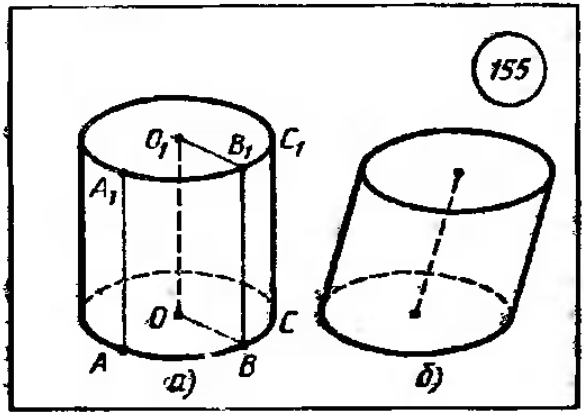
52. Цилиндр. *Цилиндром* (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются *осно-*

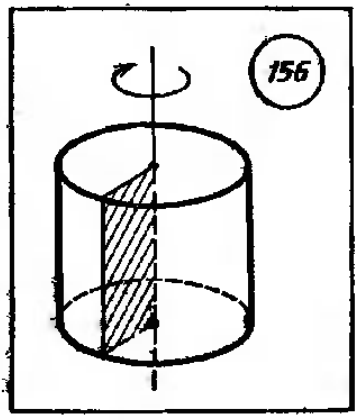


ваниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,— *образующими* цилиндра. На рисунке 155 изображен цилиндр. Круги с центрами O и O_1 являются его основаниями, AA_1, BB_1, CC_1 — его образующие.

Можно доказать, что основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях, что у цилиндра образующие параллельны и равны. Поверхность цилиндра состоит из оснований и *боковой поверхности*. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. На рисунке 155, *б* изображен наклонный цилиндр, а на рисунке 155, *а* — прямой.





В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром. Его можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из сторон как оси (рис. 156).

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований. *Осью* цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую прямого цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра.

На рисунке 157 сечение ABB_1A_1 проходит через ось цилиндра OO_1, т. е. является осевым сечением.

Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

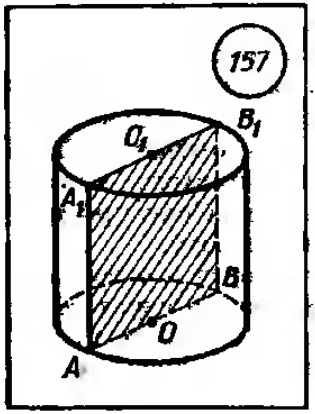
Призмой, *вписанной* в цилиндр, называется такая призма, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основания цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра. Призма называется *описанной* около цилиндра, если ее основания — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра.

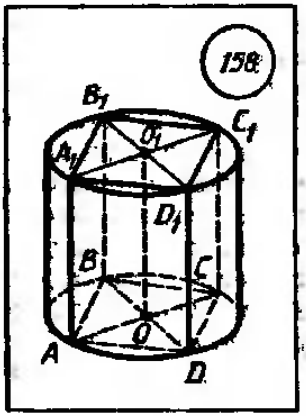
На рисунке 158 изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вписанная в цилиндр. На рисунке 159 призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ описана около цилиндра.

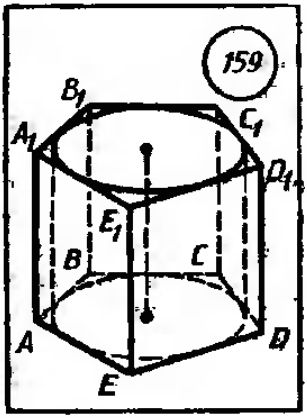
Пример. В цилиндр вписать правильную четырехугольную призму.

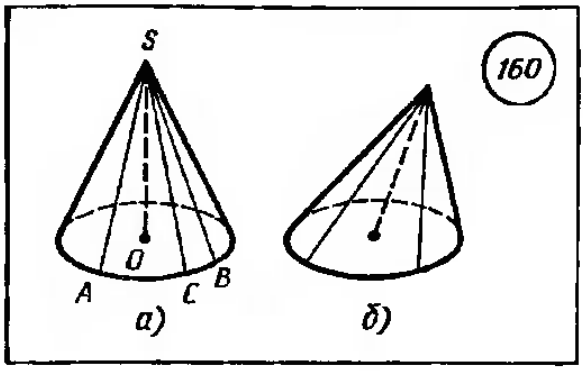
Решение. 1) Впишем в основание цилиндра квадрат $ABCD$ (рис. 158).

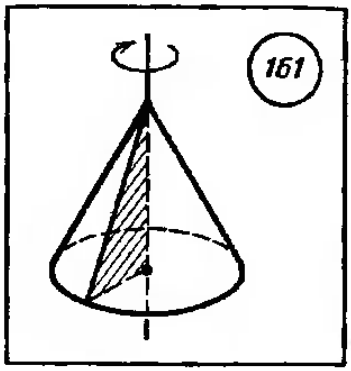
2) Проведем образующие AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.











3) Через соседние пары этих образующих проведем плоскости, которые пересекают верхнее основание по хордам A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1.

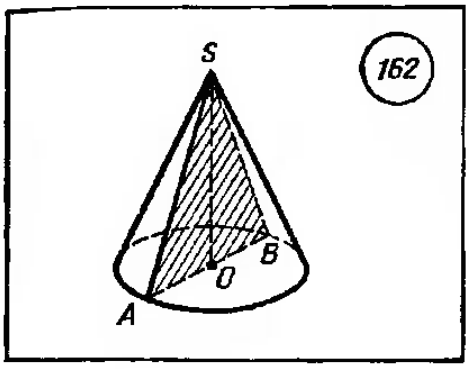
4) Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ искомая (по определениям правильной и вписанной призмы).

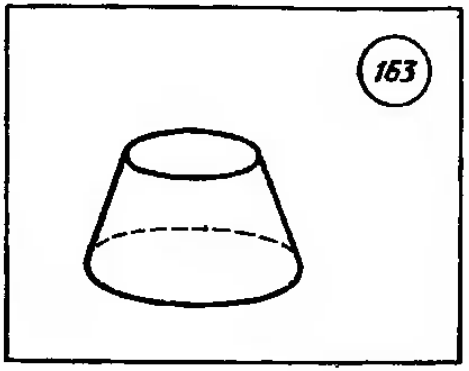
53. Конус. *Конусом* (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — *основания* конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга,— *вершины* конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими* конуса. Поверхность конуса состоит из основания и *боковой поверхности*. На рисунке 160, *а* изображен круговой конус. S — вершина конуса, круг с центром в точке O — основание конуса, SA, SB и SC — образующие конуса.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикуляриа плоскости основания. На рисунке 160, *б* изображен наклонный конус, а на рисунке 160, *а* — прямой. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом. Прямой круговой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 161).

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость осиования. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью* прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса.





На рисунке 162 изображено сечение конуса, проходящее через его ось — осевое сечение конуса.

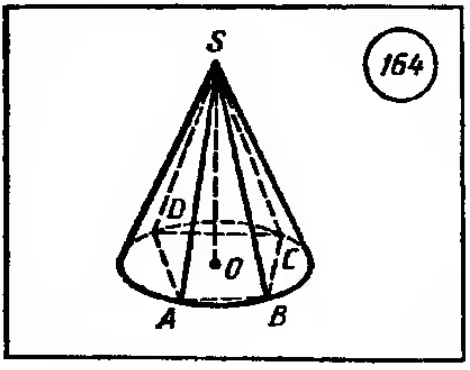
Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

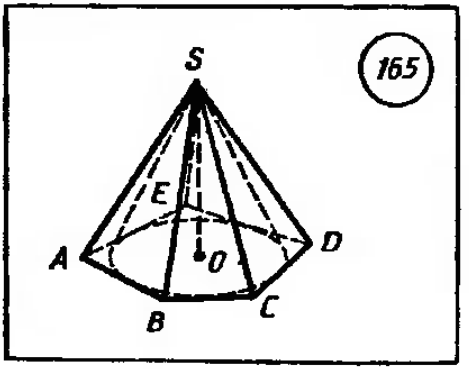
Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 163).

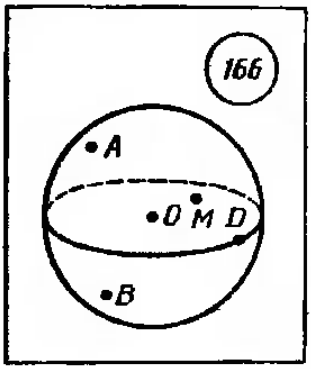
Пирамидой, *вписанной* в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса. Пирамида называется *описанной* около конуса, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

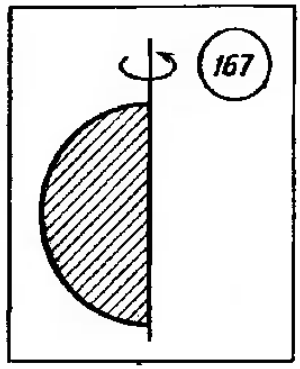
На рисунке 164 изображена пирамида, вписанная в конус, а на рисунке 165 изображен конус, вписанный в пирамиду, т. е. пирамида, описанная около конуса.

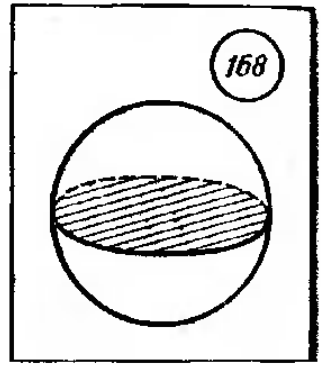
54. Шар. *Шаром* называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем











данного, от данной точки. Эта точка называется *центром* шара, а данное расстояние — *радиусом* шара. На рисунке 166 изображен шар с центром в точке O и радиусом R. Заметим, что точки A, B, M, D и O принадлежат данному шару. Граница шара называется шаровой поверхностью или *сферой*. На рисунке 166 точки A, B и D принадлежат сфере, а, например, точка M ей не принадлежит. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками* шара.

Шар, так же, как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 167).

Т. 3.5. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Если шар с центром O и радиусом R пересечен плоскостью α, то в сечении по Т. 3.5 получается круг радиуса r с центром K. Радиус сечения шара плоскостью можно вычислить по формуле

$$r=\sqrt{R^2-OK^2}.$$

Из формулы видно, что плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по равным кругам. Радиус сечения тем больше, чем ближе секущая плоскость к центру шара, т. е. чем меньше расстояние OK. Наибольший радиус имеет сечение плоскостью, проходящей через центр шара. Радиус этого круга равен радиусу шара.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом*, а сечение сферы — *большой окружностью*. На рисунке 168 плоскость α является диаметральной плоскостью, круг радиуса R является большим кругом шара, а соответствующая окружность — большой окружностью.

Т. 3.6. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

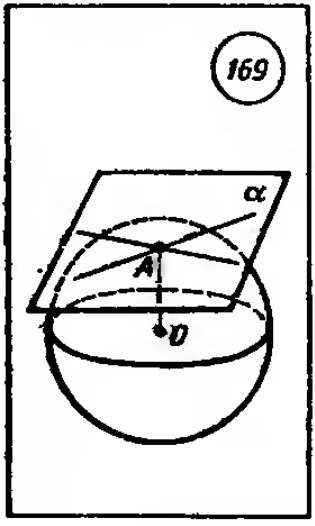
Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A, называется *касательной плоскостью*. Точка A называется *точкой касания* (рис. 169).

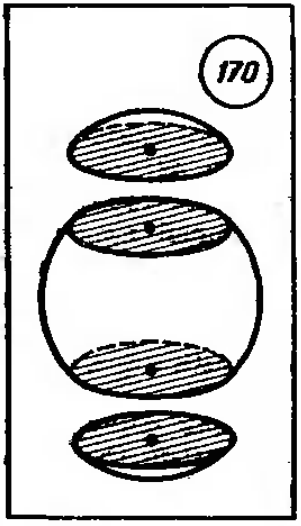
Т. 3.7. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

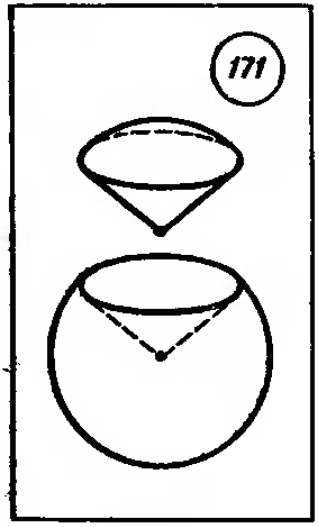
Прямая, проходящая через точку A шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной* (рис. 169).

Т. 3.8. Через любую точку шаровой поверхности проходит бесконечно много касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. *Шаровым слоем* называется часть шара, рас-







положенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар (рис. 170).

Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется (рис. 171).

§ 13. Изображение пространственных фигур на плоскости

55. Параллельная проекция. Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются *параллельным проектированием*. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую l, пересекающую плоскость, на которую проектируется данная фигура, и проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную l. Точка пересечения A_1 этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A.

На рисунке 172 изображена параллельная проекция F' фигуры F на плоскость α.

Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассмотрении ее издали.

Параллельную проекцию некоторого объекта в природе представляет, например, его тень, падающая на плоскую поверхность земли при солнечном освещении (лучи солнца можно считать параллельными). На рисунке 173 изображена параллельная проекция рамы окна, освещенной солнечными лучами, на плоскость пола.

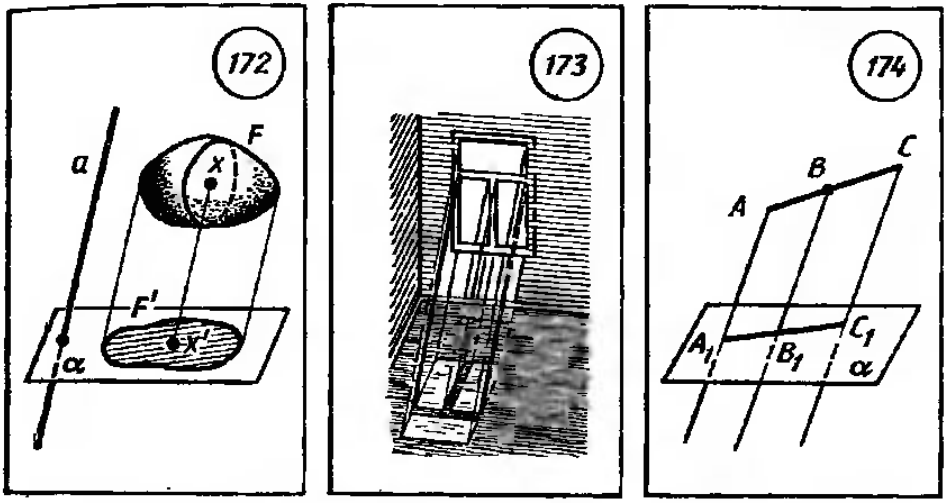
Из описанного построения изображения фигуры вытекают некоторые свойства этого изображения (изображаемые отрезки и прямые не параллельны направлению проектирования).

1. Проекция прямой есть прямая.

2. Проекция отрезка есть отрезок.

На рисунке 174 отрезок AC проектируется на плоскость α. Все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1. Отрезок A_1C_1 есть проекция отрезка AC на плоскость α. Еще раз отметим, что это утверждение справедливо, если проектируемый отрезок не параллелен направлению проектирования.

3. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками или отрезками, лежащими на одной прямой.



AC и A_1C_1 — параллельные отрезки фигуры. Прямые $A'C'$ и $A_1'C_1'$ параллельны, так как они получаются в пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA', а вторая — через прямые A_1C_1 и A_1A_1'. Таким образом параллельные отрезки AC и A_1C_1 переходят в параллельные отрезки $A'C'$ и $A_1'C_1'$.

4. Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

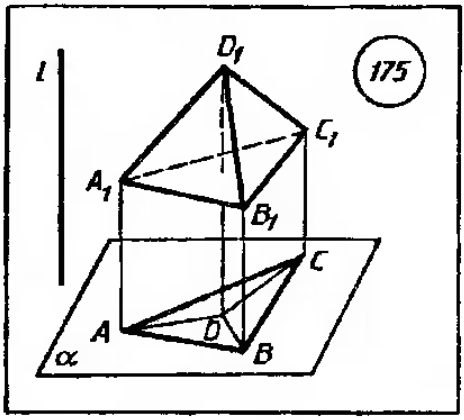
Например, $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ (рис. 174).

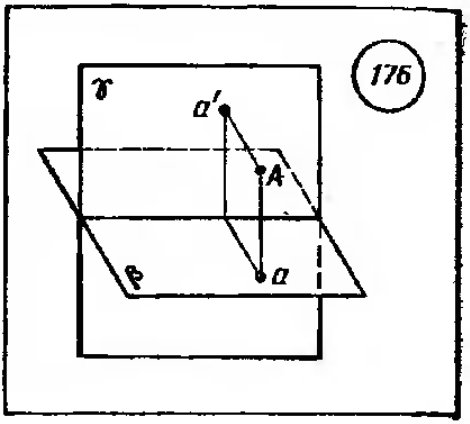
56. Ортогональное проектирование. Пусть дана плоскость α, на которой нужно изобразить фигуру. При этом направление проектирования задано прямой l, перпендикулярной α (рис. 175). Такое проектирование называется *ортогональным* (прямоугольным) *проектированием* на плоскость.

Ортогональной проекцией широко пользуются в техническом черчении. За основу выполнения технических чертежей берется способ ортогонального проектирования фигуры на две плоскости: горизонтальную β и вертикальную γ (рис. 176). Проекции точки A на эти плоскости обозначают a и a'.

Т. 3.9. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

На рисунке 177 дана ортогональная проекция $\triangle ABC$ на плоскость α. Проекцией треугольника ABC является тре-





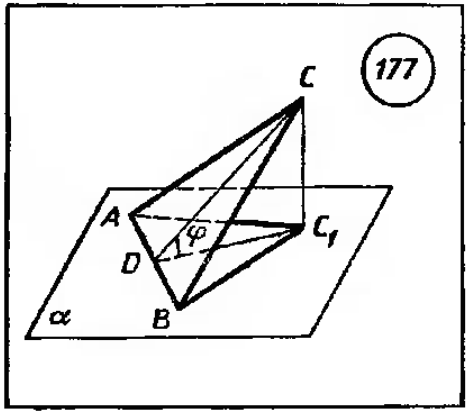
угольник ABC_1. По сформулированной теореме $S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α, на рисунке 177 это $\angle CDC_1$.

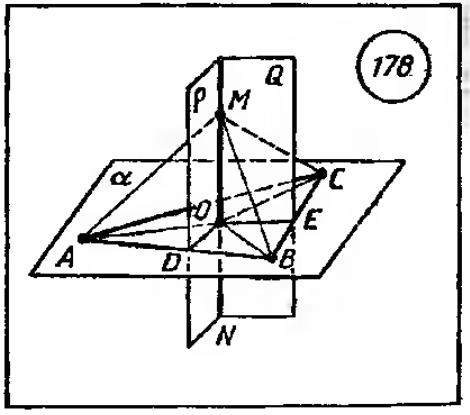
57. Геометрическое место точек в пространстве. ***Геометрическим местом точек в пространстве*** **называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, обладающих определенным свойством.**

Перечислим несколько геометрических мест точек в пространстве.

1. Геометрическим местом точек, равноудаленных от даух данных точек A **и** B**, является плоскость** α**, перпендикулярная прямой** AB **и проходящая через середину отрезка** AB.

2. Геометрическим местом точек, отстоящих от данной плоскости α **на расстоянии** d**, являются две плоскости, параллельные даниой плоскости и находящиеся от нее на расстоянии** d.





3. Геометрическим местом точек, удаленных на данном расстоянии d от данной точки O, является сфера с центром в точке O и радиусом d.

Пример 1. Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

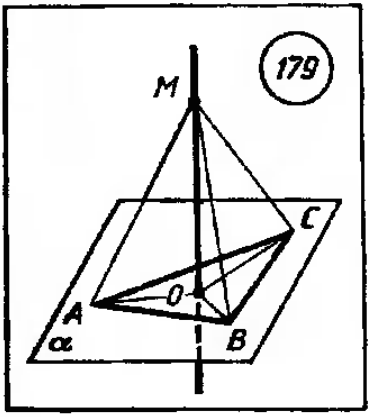
Решение. 1-й способ (рис. 178). Три данные точки A, B и C определяют плоскость α, в которой лежит $\triangle ABC$. Мы знаем, что геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B, есть плоскость P, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через середину D стороны AB; аналогично для точек B и C таким геометрическим местом точек будет плоскость Q. Точки, принадлежащие линии пересечения MN плоскостей P и Q, находятся на одинаковом расстоянии от точек A, B и C. Прямая MN — искомое геометрическое место точек.

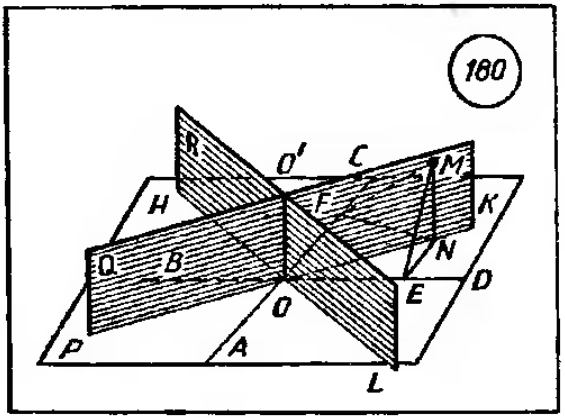
Точка O пересечения прямой MN с плоскостью α принадлежит геометрическому месту, следовательно, она находится на равном расстоянии от точек A, B и C и является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Далее, так как $AB \perp P$, то $AB \perp MN$, откуда $MN \perp \alpha$.

Вывод: искомое геометрическое место точек — прямая, перпендикулярная плоскости, определяемой данными точками A, B и C, и проходящая через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

2-й способ (рис. 179). Пусть M — одна из точек искомого геометрического места точек, т. е. $MA = MB = MC$, $MO \perp \alpha$. Наклонные MA, MB и MC равны, следовательно, равны и их проекции на плоскость α, т. е. $OA = OB = OC$.

Отсюда следует: 1) O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$; 2) точки геометрического места проектируются в одну и ту же точку на плоскости α, следовательно, все они





лежат на перпендикуляре к плоскости α, проходящем через точку O.

Пример 2. Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

Решение. Пусть AC и BD — данные прямые (рис. 180), P — плоскость, ими определяемая. Пусть M — произвольная точка искомого геометрического места, т. е. $MF \perp AC$, $ME \perp BD$ и $MF = ME$. Опустим перпендикуляр MN на плоскость P; тогда $NF = NE$ как проекции равных наклонных MF и ME на плоскость P. Прямые AC и BD соответственно перпендикулярны наклонным, следовательно, они перпендикулярны их проекциям, т. е. $AC \perp NF$ и $BD \perp NE$. Мы видим, что проекция произвольной точки геометрического места точек на плоскость P, определяемую данными прямыми, находится на одинаковом расстоянии от AC и BD. Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых на плоскости, являются две прямые KO и HL, которые делят углы, образованные данными прямыми AC и BD, пополам. Все точки перпендикуляра MN, очевидно, принадлежат геометрическому месту точек. Построим плоскость Q через прямые MN и KO. Эта плоскость по Т. 2.9 перпендикулярна плоскости P. Все точки плоскости Q принадлежат искомому геометрическому месту точек.

Аналогично доказывается, что точки искомого геометрического места лежат также и на плоскости R, перпендикулярной плоскости P. Плоскости Q и R перпендикулярны между собой, так как линейные углы KOL и KOH прямые.

Итак, искомым геометрическим местом точек являются две плоскости Q и R, перпендикулярные плоскости P, причем плоскости Q и R перпендикулярны между собой и делят углы между данными прямыми пополам.

§ 14. Объемы тел

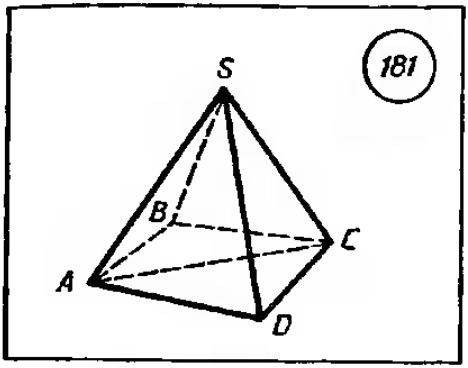
58. Понятие объема простых тел. Для простых тел *объем* — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

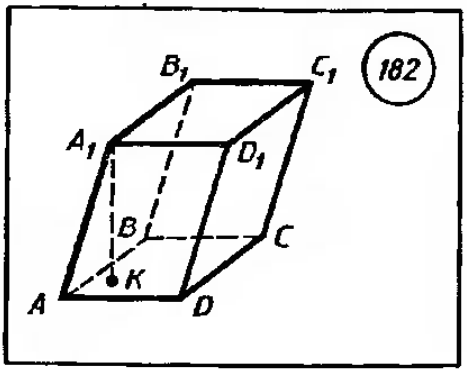
1. Равные тела имеют равные объемы.

2. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.

3. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Если куб, о котором идет речь в определении, имеет ребро 1 см, то объем измеряется в кубических сантиметрах; если ребро куба равно 1 м, то объем измеряется в кубических





метрах; если ребро куба равно 1 км, то объем измеряется в кубических километрах и т. д.

На рисунке 181 изображено простое тело — четырехугольная пирамида $SABCD$. Объем этой пирамиды на основании свойства 2 равен сумме объемов пирамид $SABC$ и $SADC$.

59. Объем параллелепипеда, призмы и пирамиды. *Объем прямоугольного параллелепипеда* находится по формуле

$$V=abc,$$

где a, b, c — ребра прямоугольного параллелепипеда. Исходя из этой формулы можно получить формулу для объема куба. *Объем куба* находят по формуле

$$V=a^3,$$

где a — ребро куба.

Иногда говорят, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров или произведению площади его основания на высоту. Последнее утверждение верно и для любого параллелепипеда.

На рисунке 182 изображен наклонный параллелепипед. Его объем равен $V=S_{ABCD}\cdot A_1K$, где S_{ABCD} — площадь основания, а A_1K — высота наклонного параллелепипеда.

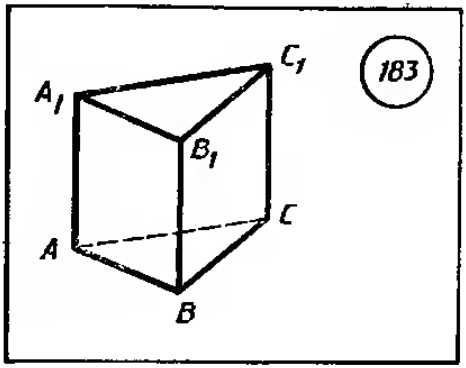
Можно вывести правило нахождения объема любой призмы (в том числе и наклонной).

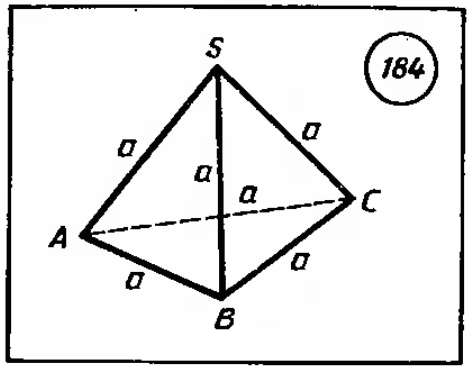
Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V=SH.$$

В случае прямой призмы (рис. 183) высота ее совпадает с боковым ребром и объем прямой призмы равен произведению площади основания на боковое ребро.

Объем любой *пирамиды* находится по формуле





$$V=\frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания, H — высота пирамиды.

На рисунке 184 изображен правильный тетраэдр $SABC$ с ребром a. Его объем равен $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Пример. В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань — прямоугольники, площади которых соответственно равны 20 дм^2 и 24 дм^2, а угол между их плоскостями равен 30°. Одна из боковых граней параллелепипеда имеет площадь 15 дм^2. Найти объем параллелепипеда.

Решение. Пусть в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и ADD_1A_1 — прямоугольники. Тогда ребро AD перпендикулярно грани ABB_1A_1 и $V=S_{ABB_1A_1}\cdot AD=(AB\times AA_1\sin 30°)\cdot AD$. Дальнейшие вычисления можно выполнить, не находя длин этих отрезков. Имеем $AD\cdot AB=20$; $AA_1\cdot AD=24$; $\frac{1}{2}AA_1\cdot AB=15$. Перемножив эти равенства почленно, получим $2V^2=15\cdot 24\cdot 20$, откуда $V=60$ дм^3.

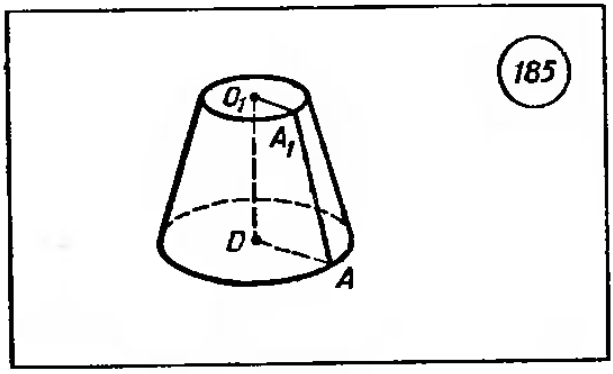
60. Объем цилиндра и конуса. Объем любого тела определяется следующим образом. Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

Применив это определение к нахождению объемов цилиндра и конуса, можно доказать теоремы.

Т.3.10. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т. е. $V=SH$.

Если радиус основания цилиндра R, а высота H, то формула его объема такова:

$$V=\pi R^2H.$$



Т.3.11. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е. $V=\frac{1}{3}SH$.

Если радиус основания конуса R, а высота H, то объем его находится по формуле

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

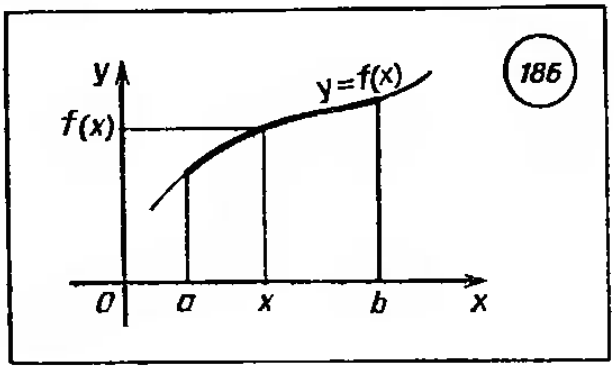
Объем усеченного конуса можно найти по формуле

$$V=\frac{1}{3}\pi H\,(R^2+Rr+r^2),$$

где R и r — радиусы оснований, H — высота усеченного конуса.

Объем усеченного конуса, изображенного на рисунке 185, находится по формуле $V=\frac{1}{3}\pi OO_1\,(OA^2+OA\cdot O_1A_1+O_1A_1^2)$.

61. Общая формула объемов тел вращения. Объем шара и его частей. Для вывода формулы объема тела вращения вводят декартовы координаты в пространстве, приняв ось тела за ось x. Плоскость xy пересекает поверхность тела по линии, для которой ось x является осью симметрии. Пусть $y=f(x)$ — уравнение той части линии, которая расположена над осью x (рис. 186).



При вычислении объема части тела вращения, заключенной между параллельными плоскостями $x=a$ и $x=b$, пользуются формулой анализа (см. п. 228).

$$V=V(b)-V(a)=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx,$$

где $a<b$, $f(x)$ — непрерывная на $[a;\ b]$ функция.

С помощью этой формулы можно получить формулы объемов конкретных тел вращения, выбрав соответственно систему координат и определив функцию $f(x)$.

В частности, формула *объема шара* радиуса R такова:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Объем шарового сегмента, высота которого H, а радиус R, находится по формуле

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

Формула *объема шарового сектора:*

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, H — высота соответствующего шарового сегмента.

§ 15. Площади поверхностей тел

62. Площади поверхностей многогранников. *Площадью поверхности многогранника* называется сумма площадей всех его граней (иногда говорят площадь полной поверхности).

Для некоторых миогогранников, например для пирамиды, призмы, рассматривается *площадь боковой поверхности.*

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей боковых граней. *Площадь полной поверхности призмы* равна сумме площадей ее боковой поверхности и площадей ее оснований. Площадь боковой поверхности призмы, изображенной на рисунке 147, равна сумме площадей параллелограммов ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, AA_1D_1D. Площадь полной поверхности этой призмы равна площади боковой поверхности плюс сумма площадей двух оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Т.3.10. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длиу бокового ребра.

Т.3.11. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.

Из этих теорем вытекает, что площадь полной поверхности куба с ребром a равна $6a^2$.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней. *Площадь полной поверхности пирамиды* равна сумме площадей ее боковой поверхности и площади осиования. Площадь боковой поверхности пирамиды, изображенной на рисунке 150, *б*, равна сумме площадей трех треугольников SAC, SCB, SBA. Площадь полной ее поверхности состоит из боковой поверхности и площади основания ABC.

Т.3.12. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему, т. е. $S_б = \frac{pl}{2}$, где p — периметр основания, а l — апофема пирамиды.

Т.3.13. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров основания на апофему, т. е. $S = \frac{1}{2}(an + bn)l$, где an и bn — периметры основания, а l — апофема.

Площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром a равна $a^2\sqrt{3}$, а, например, площадь поверхности октаэдра с ребром a равна $2a^2\sqrt{3}$.

Пример. Все ребра правильной пирамиды увеличились в 3 раза. Как изменится площадь полной поверхности пирамиды?

Решение. Пусть площадь полной поверхности n-угольной пирамиды S равна $nS_\Delta + S_{осн}$, где S_Δ — площадь одиой боковой грани, а $S_{осн}$ — площадь основания. При увеличении каждого ребра в 3 раза правильиый многоугольник основания перейдет в подобный, а каждый из n треугольников (по признаку подобия) перейдет в подобный, т. е. $S'_\Delta = 9S_\Delta$, $S'_{осн} = 9S_{осн}$, отсюда $S' = 9S$. Площадь полной поверхности пирамиды увеличится в 9 раз.

63. Понятие площади поверхности. Пусть F — данная поверхность. Построим тело F_h, состоящее из всех точек пространства, для которых иайдется точка поверхности F на расстоянии, не большем h. Наглядно тело F_h можно представить себе как тело, заполненное краской при окрашивании поверхности с обеих сторон слоем краски толщиной h.

Пусть V_h — объем тела F_h. Площадью поверхности тела F мы будем называть предел отношения $\frac{V_h}{2h}$ при $h \to 0$, т. е.

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

64. Площади поверхностей тел вращения. Воспользовавшись данным в предыдущем пункте определением площади поверхности, можно получить формулы, по которым вычисляются площади поверхностей различных тел вращения.

Площадь сферы находится по формуле

$$S = 4\pi R^2,$$

где R — радиус сферы.

Площадь поверхности сферического сегмента находится по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус сферы, а H — высота сегмента.

Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, а H — его высота. Для нахождения площади полной поверхности цилиндра надо к площади боковой поверхности прибавить удвоенную площадь основания.

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле

$$S = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — его образующая. Для нахождения площади полной поверхности конуса нужно к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания.

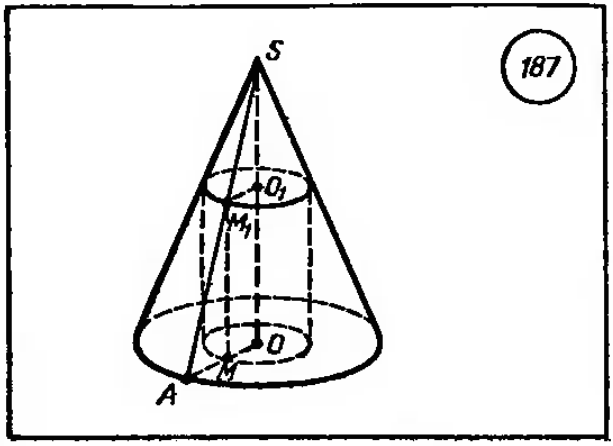
Площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле

$$S = \pi (R + r) l,$$

где R и r соответственно радиусы оснований, а l — его образующая.

Пример 1. В конус, радиус основания которого R и высота H, вписан цилиндр. Найдите размеры цилиндра, при которых площадь его боковой поверхности имеет наибольшее значение.

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а его высоту через h (рис. 187). Из подобия $\triangle SAO$ и



$\triangle M_1AM$ следует, что $\frac{R-r}{h}=\frac{R}{H}$, откуда $h=\frac{(R-r)H}{R}$. Подставив в формулу $S_б=2\pi rh$ значение h, получим $S_б=2\pi rH-\frac{2\pi H}{R}r^2$.

Рассмотрим $S_б$ как функцию r и исследуем ее на экстремум. Для этого найдем ее производную $S_б'=2\pi H-\frac{4\pi H}{R}\cdot r$.

Очевидно, $S'=0$ при $r=\frac{R}{2}$. В этой точке функция $S_б$ имеет максимум. Итак, наибольшее значение площадь боковой поверхности цилиндра принимает при $r=\frac{R}{2}$, а $h=\frac{1}{2}H$.

ГЛАВА IV. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

§ 16. Координаты на плоскости и в пространстве

65. Введение координат на плоскости и в пространстве. Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y — *оси координат*. Ось x (она обычно горизонтальная) называется *осью абсцисс*, а ось y — *осью ординат*. Точка пересечения этих осей O называется *началом координат*. Этой точкой каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть положительной, отмечая ее стрелкой, а другую — отрицательной. На рисунке 188, *а* изображены оси x и y, точка O — начало координат.

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — *координаты* точки — абсциссу (x) и ординату (y) по такому правилу.

Через точку A проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. 188, *б*). Она пересечет ось абсцисс x в некоторой точке A_x. *Абсциссой* точки A мы будем называть число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от O до A_x. Это число положительное, если A_x принадлежит положительной полуоси; отрицательное, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка лежит на оси ординат y, то полагаем $x=0$.

Ордината (y) точки A определяется аналогично. Через точку A проведем прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 188, *б*). Она пересечет ось ординат y в некоторой точке A_y. Ординатой точки A мы будем называть число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки A_y до O. Это число положительное, если A_y принадлежит положительной полуоси; отрицательное, если A_y принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси абсцисс, то полагаем $y=0$.

Координаты точки записываются в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например $A(x; y)$ (на первом месте абсцисса, на втором — ордината).

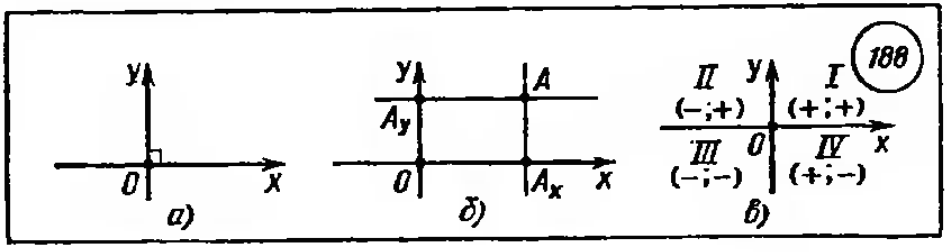
Оси координат разбивают плоскость на четыре части — *четверти* I, II, III, IV (рис. 188, *в*). В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются. В первой четверти они положительны, во второй — абсцисса отрицательна, а ордината положительна, в третьей — абсцисса и ордината отрицательны, в четвертой — абсцисса положительна, а ордината отрицательна (рис. 188, *в*).

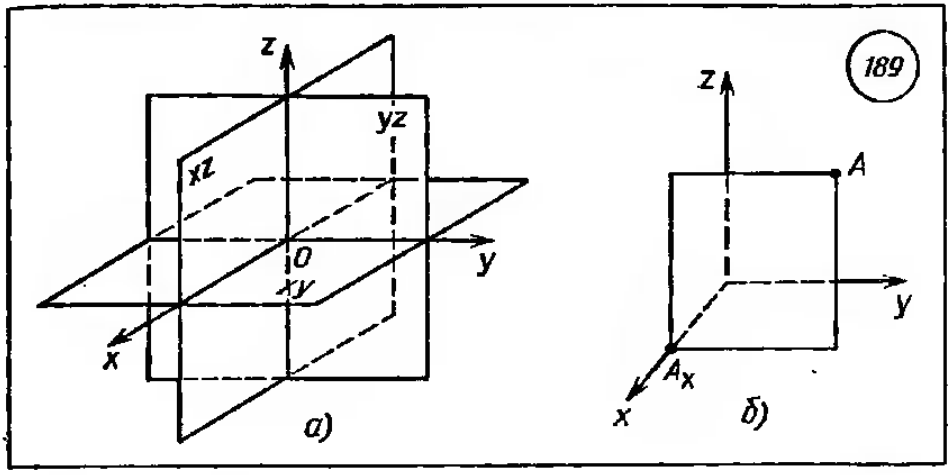
Точки оси x имеют равные нулю ординаты ($y=0$), а точки оси y — равные нулю абсциссы ($x=0$). Абсцисса и ордината начала координат равны нулю.

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть плоскостью xy. Произвольную точку A этой плоскости с координатами x и y обозначают $A(x; y)$.

Введенные на плоскости координаты x, y называются *декартовыми* по имени французского математика Р. Декарта (1596—1650).

Аналогично вводятся *декартовы координаты в пространстве*. Возьмем три попарно перпендикулярные прямые x, y и z, кото-





рые пересекаются в одной точке O (рис. 189, *а*). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями* или осями координат, точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, xz, yz — *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые. Одна из них называется положительной, а другая — отрицательной.

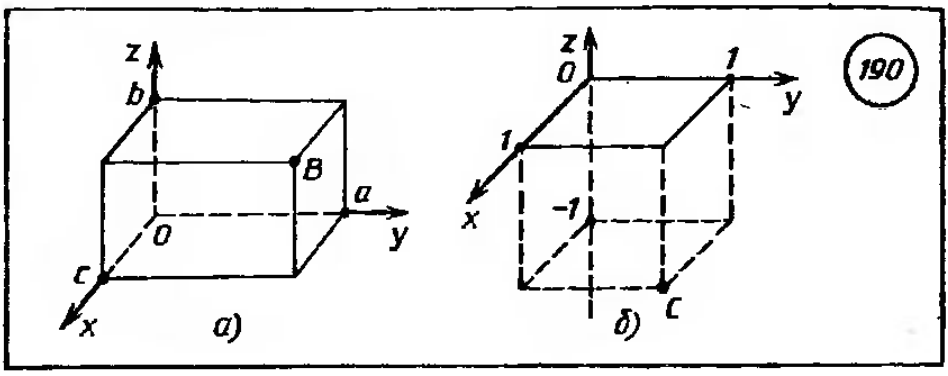
Если через точку A проведем плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 189, *б*), то она пересекает ось x в некоторой точке A_x. Координатой x точки A будет число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x. Оно положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то $x=0$. Аналогично определяются координаты y и z. Точку A с координатами x, y, z обычно записывают так: $A(x; y; z)$.

Итак, каждой точке A пространства сопоставляют три числа x, y, z — *координаты точки* A в пространстве.

На рисунке 190, *а* точка B в пространстве имеет три координаты c, a, b, т. е. $B(c; a; b)$.

Можно по трем числам найти положение точки в пространстве. Например, три числа 1, 1, —1 задают положение точки C в пространстве (рис. 190, *б*).

66. Координаты середины отрезка. Расстояние между точками. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — две произвольные точки плоскости и $C(x; y)$ — середина отрезка AB (рис. 191). Фор-



мулы, связывающие координаты точки C с координатами точек A и B, таковы:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Формулы верны и в случае, если отрезок AB параллелен одной из осей координат.

Для точек A, B и C пространства эти формулы аналогичны.

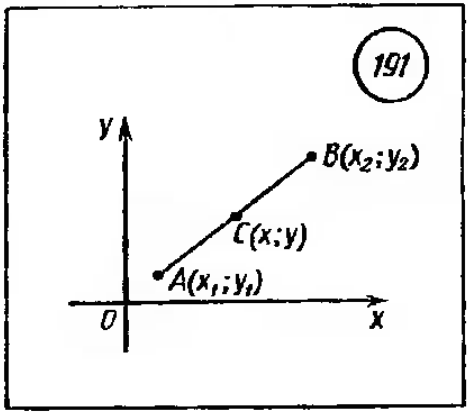
Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — две произвольные точки. Формулы, выражающие координаты x, y, z точки C — середины отрезка AB через координаты его концов A и B, таковы:

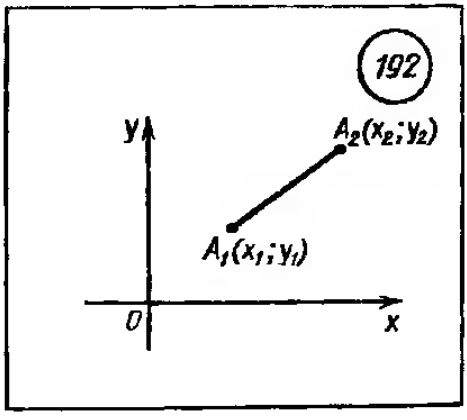
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Существует формула для нахождения расстояния между точками, заданными своими координатами.

Если точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ (рис. 192) лежат на плоскости, то расстояние между A_1 и A_2 находится по формуле

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$





Эта формула верна для любого расположения точек A_1 и A_2.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ пространства находится по формуле

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Пример 1. Найти координаты одиого из концов диаметра окружности, если другим его концом является точка (2; 3), а центром окружности — точка (0; 1).

Решение. Известно, что центр окружности является серединой любого диаметра, поэтому, подставив в формулы для нахождения координат точки (0; 1) середины отрезка координаты концов его (2; 3) и $(x_2; y_2)$, получим:

$$0=\frac{2+x_2}{2},\quad 1=\frac{3+y_2}{2},$$

откуда $x_2=-2$, $y_2=-1$ — координаты другого конца диаметра.

Пример 2. Найти расстояние между точками плоскости $A(-1; 2)$ и $B(2; 4)$.

Решение. По формуле $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ получим, что $AB=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Пример 3. Найти расстояние от точки пространства (1; 2; −3) до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.

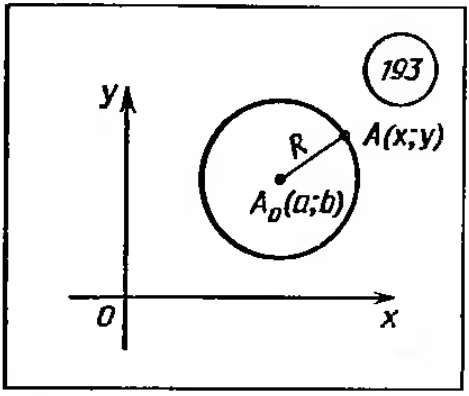
Решение. 1) Пусть $A(1; 2; -3)$ и AA_1 — расстояние от A до плоскости xy, т. е. $A_1(1; 2; 0)$, так как $AA_1\perp xy$ и A_1 принадлежит плоскости xy. Тогда по формуле $AA_1=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(0+3)^2}=3$. Аналогично $AA_2=2$, $AA_3=1$.

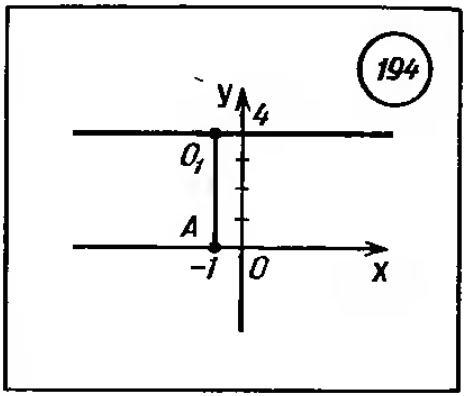
2) Пусть AA_x — расстояние от A до оси x, тогда $A_x(1; 0; 0)$, откуда $AA_x=\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$. Аналогично $AA_y=\sqrt{10}$, $AA_z=\sqrt{5}$.

3) Так как $O(0; 0; 0)$, то $AO=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$.

§ 17. Уравнения фигур на плоскости

67. Уравнение окружности. *Уравнением фигуры на плоскости* в декартовых координатах называется такое уравнение с двумя переменными x и y, что координаты любой точки фигуры являются решением этого уравнения. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.





Окружность с центром $A_0(a; b)$ и радиусом R (рис. 193) задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Пример. Составить уравнение окружности с центром на прямой $y=4$, касающейся оси x в точке $A(-1; 0)$.

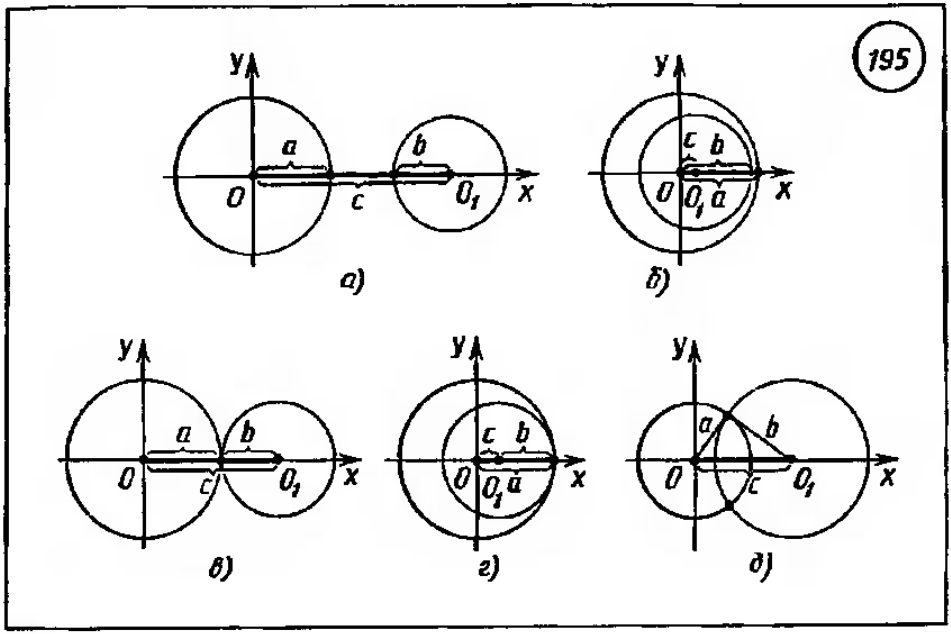
Решение. В системе координат xy построим прямую $y=4$ (рис. 194) и точку $A(-1; 0)$. По условию окружность должна касаться оси x в точке A, а ее центр должен лежать на прямой $y=4$, т. е. центр окружности — точка O_1 будет иметь координаты $O_1(-1; 4)$. Искомое уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $(-1; 4)$ и радиусом 4:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=16.$$

68. Пересечение двух окружностей. На рисунке 195 даны две окружности с центрами O и O_1, расстоянием между центрами $OO_1=c$ и радиусами, соответственно равными a и b. Примем точку O за начало координат, а полупрямую OO_1 за положительную полуось x. Тогда уравнения окружностей таковы:

$$x^2+y^2=a^2, \quad (x-c)^2+y^2=b^2.$$

Решив систему этих уравнений, можно сделать вывод: если одно из чисел a, b, c больше суммы двух других, то окружности не имеют общей точки (рис. 195, *а*); если одно из этих чисел равно сумме двух других, то окружности касаются (рис. 195, *в*, *г*); если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то окружности имеют две общие точки, т. е. пересекаются (рис. 195, *д*).



69. Уравнение прямой. Любая прямая в декартовых координатах на плоскости задается уравнением

$$ax+by+c=0.$$

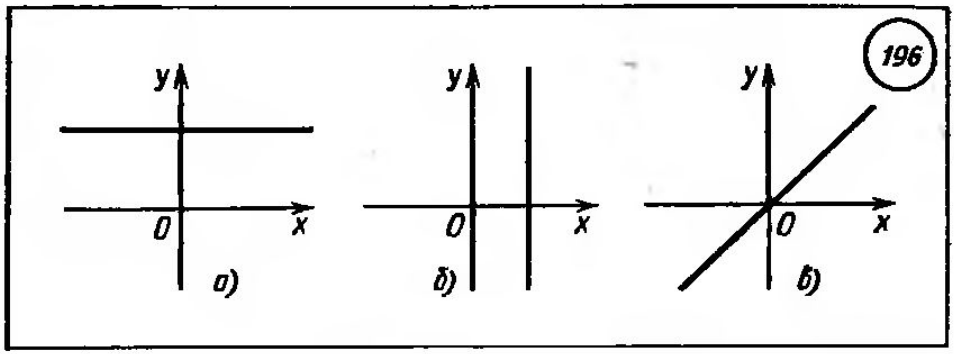
Коэффициенты a и b в этом уравнении могут принимать различные значения. В зависимости от этого прямая будет по-разному располагаться на плоскости. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $a=0$, $b\neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно записать так: $y=-\frac{c}{b}$. Все точки имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$, следовательно, прямая параллельна оси x (рис. 196, *а*). В частности, если $c=0$, то прямая совпадает с осью x.

2. $b=0$, $a\neq 0$. В этом случае уравнение принимает вид $x=-\frac{c}{a}$. Прямая параллельна оси y (рис. 196, *б*) или совпадает с ней, если $c=0$.

3. $c=0$. Уравнение принимает вид $ax+by=0$. Прямая проходит через начало координат (рис. 196, *в*).

Если в уравнении прямой $ax+by+c=0$ коэффициент $b\neq 0$, то можно записать $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Обозначив $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=q$, получим $y=kx+q$. Коэффициент k в этом уравнении называется *угловым коэффициентом прямой.*



На рисунке 197 точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат изображенным прямым, а значит,

$$y_1 = kx_1 + q, \quad y_2 = kx_2 + q;$$

вычитая почленно из второго равенства первое, получим:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

откуда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

В случае, изображенном на рисунке 197, *а*,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

В случае, изображеином на рисунке 197, *б*,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Угловой коэффициент прямой имеет следующий геометрический смысл: коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4; -2)$.

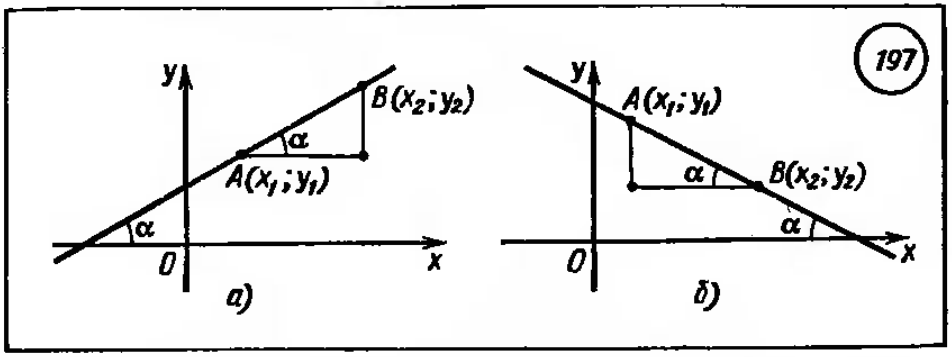
Решение. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + q$. Надо найти k и q.

Прямая проходит через начало координат, т. е. координаты точки $O(0; 0)$ удовлетворяют уравнению прямой $0 = k \cdot 0 + q$, т. е. $q = 0$.

Угловой коэффициент k иайдем по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

где $O(x_1; y_1)$ и $A(x_2; y_2)$ — точки, через которые проходит пря-



мая, т. е. $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=4$, $y_2=-2$. Итак, $k=\frac{-2-0}{4-0}=$

$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$.

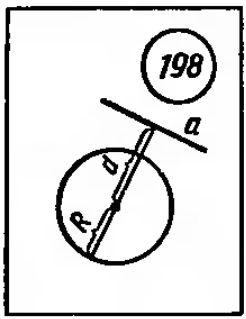
Искомое уравнение прямой имеет вид $y=-\frac{x}{2}$.

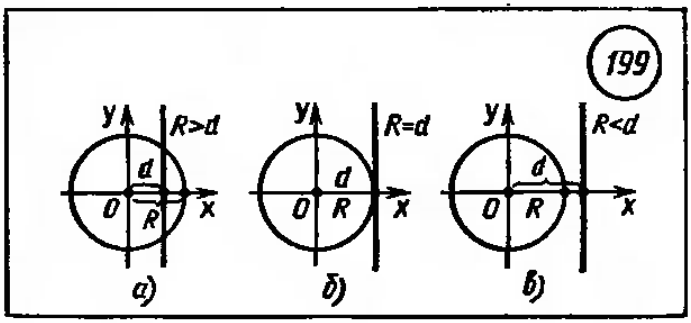
70. Пересечение прямой и окружности. На рисунке 198 изображена окружность радиуса R и прямая a, d — расстояние от центра этой окружности до прямой a. Если принять центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную прямой a, за ось x (рис. 199), то уравнения окружности и прямой таковы: $x^2+y^2=R^2$, $x=d$. Решая полученную систему, найдем $x=d$, $y=\pm\sqrt{R^2-d^2}$.

Окружность и прямая имеют две общие точки, т. е. пересекаются, если $R>d$ (рис. 199, *а*); прямая и окружность имеют одну общую точку, т. е. касаются, если $R=d$ (рис. 199, *б*); прямая и окружность ие пересекаются, если $R<d$ (рис. 199, *в*).

Пример 1. Окружность с центром в точке $A(2; 3)$ касается оси y. Пересекает ли эта окружность ось x?

Решение. Из условия следует, что радиус окружности равен 2, а уравнение имеет вид $(x-2)^2+(y-3)^2=4$. Далее задачу можно решить по-разному.





1-й способ. Для того чтобы окружность пересекла ось x, должно выполняться условие $R<d$, где R — радиус окружности, а d — расстояние от центра окружности до прямой. Так как $R=2$, а $d=3$, то окружность не пересекает ось x.

2-й способ. При $y=0$ имеем $(x-2)^2+(0-3)^2=4$, $(x-2)^2=-5$, что невозможно. Поскольку условие $y\leqslant 0$ приводит к неравенству $(x-2)^2\leqslant -5$, можем сделать вывод: окружность $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ не пересекает ось x.

Пример 2. При каком значении c прямая $x+y+c=0$ касается окружности $x^2+y^2=1$?

Решение. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+c=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-c-y, \\ (-c-y)^2+y^2=1. \end{cases}$$

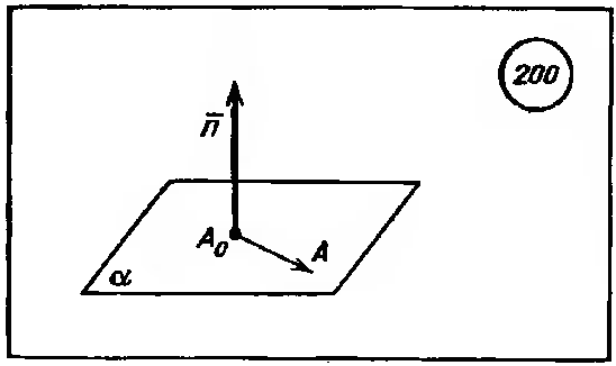
Преобразовав второе уравнение, получаем квадратное уравнение $2y^2+2cy+c^2-1=0$, дискриминант которого равен $D=-4c^2+8$. Для того чтобы прямая и окружность касались, нужно, чтобы они имели единственную общую точку, а это значит, что полученное квадратное уравнение относительно y должно иметь единственное решение. Это будет в том случае, если $D=0$, т. е. $-4c^2+8=0$, откуда $c=\pm\sqrt{2}$. Прямые $x+y+\sqrt{2}=0$ и $x+y-\sqrt{2}=0$ касаются окружности $x^2+y^2=1$.

§ 18. Уравнения фигур в пространстве

71. Уравнение плоскости. Уравнение фигуры в пространстве определяется так же, как и на плоскости.

Пусть $A_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка плоскости α и $\bar{n}(a; b; c)$ — вектор, перпендикулярный этой плоскости (рис. 200). Пусть $A(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости α, т. е. $AA_0\perp n$, тогда $\overline{AA_0}\cdot\bar{n}=0$. Координаты точки A удовлетворяют уравнению

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0. \qquad (1)$$



Верно и то, что если точка $A(x; y; z)$ удовлетворяет уравнению (1), то точка A лежит в плоскости α. Таким образом, уравнение (1) есть уравнение плоскости α.

Уравнение плоскости можно записать в виде

$$ax+by+cz+d=0.$$

Коэффициенты a, b, c в этом уравнении являются координатами вектора, перпендикулярного этой плоскости.

72. Уравнение сферы. Пусть центр сферы находится в точке $A(a; b; c)$, а радиус сферы равен R. Точками сферы являются те и только те точки пространства, расстояние от которых до точки A равно R. Квадрат расстояний от любой точки $B(x; y; z)$ сферы до точки A равен $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$. Поэтому *уравнение сферы* с центром $A(a; b; c)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Сфера с центром $(2; -1; 3)$ и радиусом 5 задается уравнением $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$.

Если центром сферы является начало координат, то уравнение сферы с радиусом R таково:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Шар задается не уравнением, а неравенством. Рассмотрим шар с центром $A(a; b; c)$ и радиусом R. По определению шара (п. 54) ему принадлежат все такие точки M, для которых $AM \leqslant R$, т. е. $AM^2 \leqslant R^2$. Учитывая, что $A(a; b; c)$, а $M(x; y; z)$, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2.$$

Если центр шара находится в начале координат, то неравенство таково:

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2.$$

Аналогично круг радиуса r в прямоугольных координатах на плоскости с центром $A(a; b)$ или в начале координат задается неравенством

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant r^2.$$

Пример. Запишите уравнение сферы, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, если радиус ее равен 3.

Решение. Уравнение сферы с центром $M(a; b; c)$ и радиусом 3 имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=9$. Ему должны удовлетворять координаты точек A, B и C. Числа a, b и c отыскиваются из системы трех уравнений, получающихся при подстановке в уравнение сферы координат трех данных точек:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9, \\ (4-a)^2+b^2+c^2=9, \\ a^2+(4-b)^2+c_2=9. \end{cases}$$

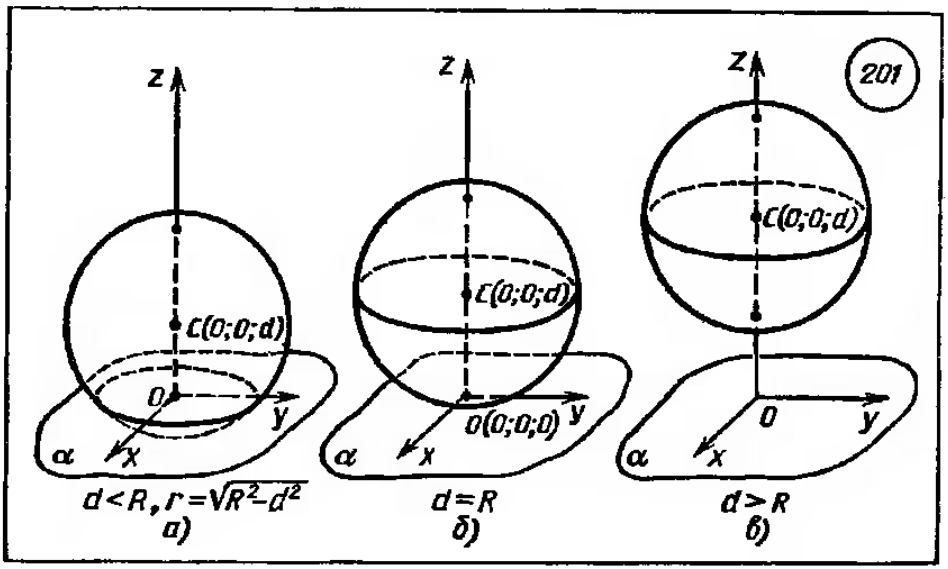
Почленно вычитая первое уравнение из второго и третьего, получаем $16-8a=0$, $16-8b=0$, откуда $a=b=2$. Значение c отыскивается подстановкой найденных значений a и b в первое уравнение: $4+4+c^2=9$, $c^2=1$, $c_1=1$, $c_2=-1$.

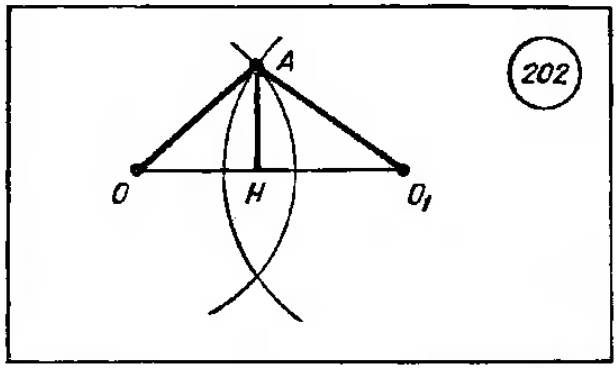
Таким образом, существуют две сферы, удовлетворяющие условию задачи, их центры O_1 (2; 2; 1) и O_2 (2; 2; -1), а уравнения таковы: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ и $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

73. Взаимное расположение сферы и плоскости. Пусть дана сфера радиуса R, а расстояние от ее центра C до плоскости α равно d. Введем систему координат так, как показано на рисунке 201: плоскость xy совпадает с плоскостью α, а центр C сферы лежит на оси z. В этой системе координат точка C имеет координаты (0; 0; d), поэтому уравнение сферы таково: $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$. Плоскость совпадает с координатной плоскостью xy, поэтому ее уравнение $z=0$.

Если координаты какой-нибудь точки M (x; y; z) удовлетворяют обоим уравнениям, то точка M лежит как в плоскости α, так и на сфере, т. е. является общей точкой плоскости и сферы. Если же система этих двух уравнений не имеет решений, то сфера и плоскость не имеют общих точек. Таким образом, вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости сводится к исследованию системы уравнений:

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2. \end{cases}$$





Возможны три случая:

1. $d<R$. Система имеет бесчисленное множество решений, все точки лежат на окружности. Вывод: если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность (рис. 201, *а*).

2. $d=R$. Система имеет единственное решение. Вывод: если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют единственную общую точку — точку касания (рис. 201, *б*).

3. $d>R$. Система не имеет решений. Вывод: если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 201, *в*).

74. Пересечение двух сфер. Для отыскания условия пересечения двух сфер примем прямую, соединяющую их центры, за ось x. Пусть точка $A\,(a;\,0;\,0)$ — центр первой сферы, а R_1 — ее радиус. Точка $B\,(b;\,0;\,0)$ — центр второй сферы, а R_2 — ее радиус. Уравнениями сфер будут

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2 \text{ и } (x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2.$$

Решая эту систему, можно прийти к выводу:

Т.4.1. | Линия пересечения двух сфер есть окружность.

Пример. Радиусы шаров равны 25 и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найти длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение. Рассмотрим на плоскости отрезок OO_1 длиной 36 дм и две окружности с центрами в точках O и O_1 радиусами 25 и 29 дм. Если A — одна из точек пересечения этих окружностей (рис. 202), то радиус r окружности пересечения данных в условии задачи сфер (поверхностей данных шаров) равен высоте AH треугольника AOO_1 и его можно найти, предварительно вычислив площадь по формуле Герона (п. 37). $p=$

$=\frac{1}{2}(36+25+29)=45$. $S_{\triangle AOO_1}=\sqrt{45\cdot 9\cdot 20\cdot 16}=9\cdot 5\cdot 2\cdot 4=$ $=360$. С другой стороны, $S_{\triangle AOO_1}=\frac{1}{2}r\cdot 36$, откуда $r=20$ дм$=$ $=2$ м.

Длина окружности пересечения сфер равна $C=2\pi r=4\pi$ м.

ГЛАВА V. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

§ 19. Движение

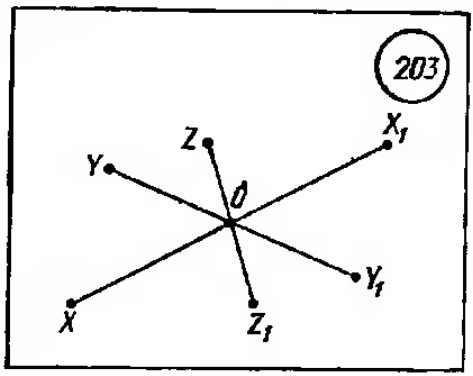
75. Примеры преобразований фигур. *Преобразования фигур* изучаются в курсе геометрии на плоскости и в пространстве. Если каждую точку данной фигуры на плоскости или в пространстве сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной. Приведем несколько примеров преобразований фигур.

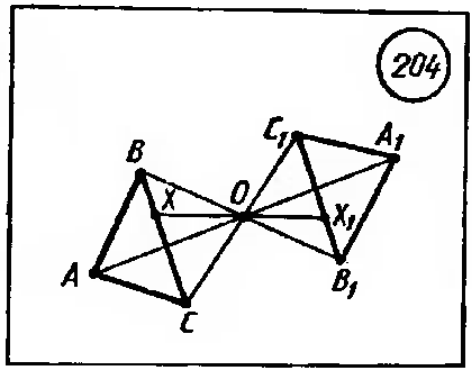
1. Симметрия относительно точки (центральная симметрия). Симметрия относительно точки определяется так. Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка. Точка X_1 называется *симметричной точке X относительно точки O*, если точки X, O, X_1 лежат на одной прямой и $OX=OX_1$. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. На рисунке 203 точки X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 симметричны друг другу относительно точки O.

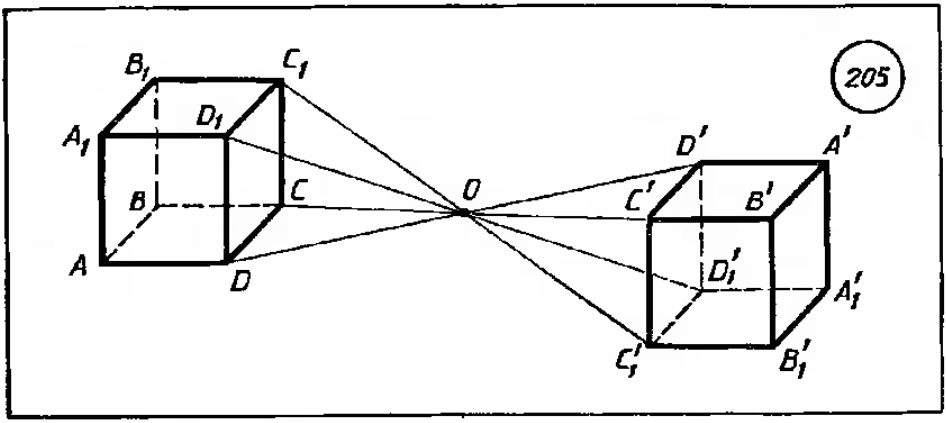
Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка плоскости. Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную X относительно данной точки O, называется *преобразованием симметрии относительно точки O*. На рисунке 204 изображен $\triangle A_1B_1C_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно центра O.

На рисунке 205 изображены два куба, симметричные относительно точки O.

Если преобразование симметрии относительно точки O пере-





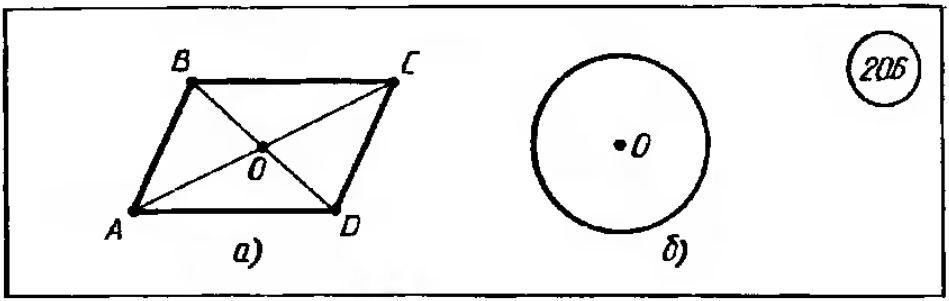


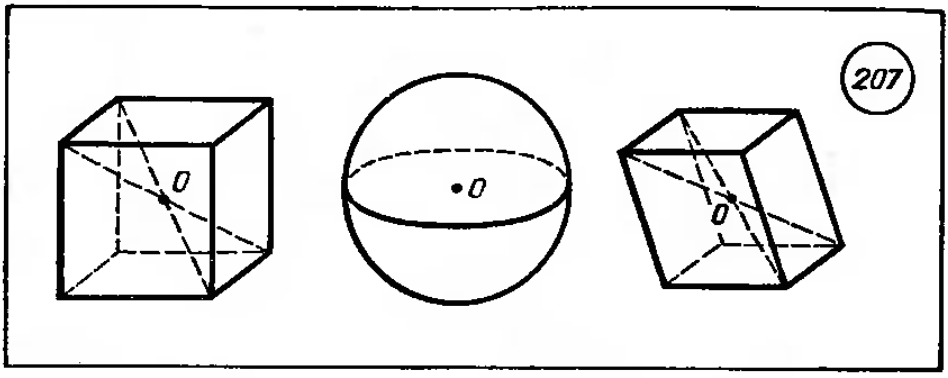
водит фигуру в себя, то фигура называется *центрально-симметричной*, а точка O — ее *центром симметрии*. Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Центром его симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 206, *а*). Окружность с центром O тоже центрально-симметричная фигура с центром симметрии O (рис. 206, *б*). Все перечисленные фигуры плоские.

В пространстве, так же как и на плоскости, много примеров центрально-симметричных фигур. Например, на рисунке 207 изображены такие фигуры: это куб, сфера, параллелепипед.

2. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия). Пусть l — фиксированная прямая (рис. 208). Точка X_1 называется *симметричной точке X относительно прямой l*, если прямая XX_1 перпендикулярна прямой l и $OX_1=OX$, где O — точка пересечения прямых XX_1 и l. Если точка X лежит на прямой l, то симметричная ей точка есть сама точка X. Точка, симметричная точке X_1, есть точка X. На рисунке 208, *а* точки X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 симметричны относительно прямой l.

Преобразование фигуры F в F_1, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно прямой l, называется *преобразованием симметрии относительно прямой l*. При этом фигуры F и F_1 называются *симметричными отно-*





сительно прямой l. На рисунке 208, *б* изображены окружности, симметричные относительно прямой *l*.

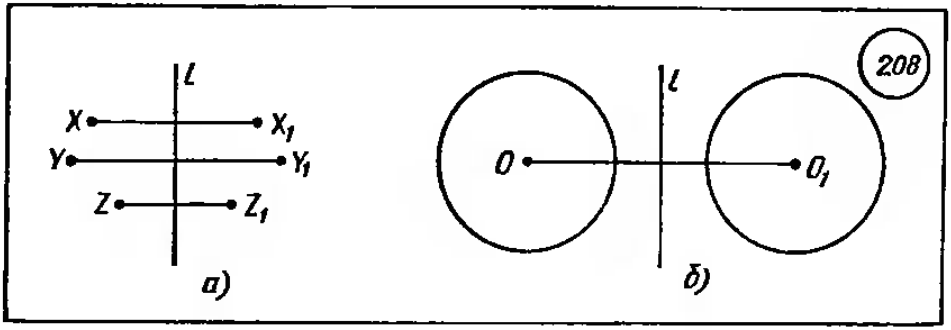
На рисунке 209 изображены две сферы, симметричные относительно прямой *l*.

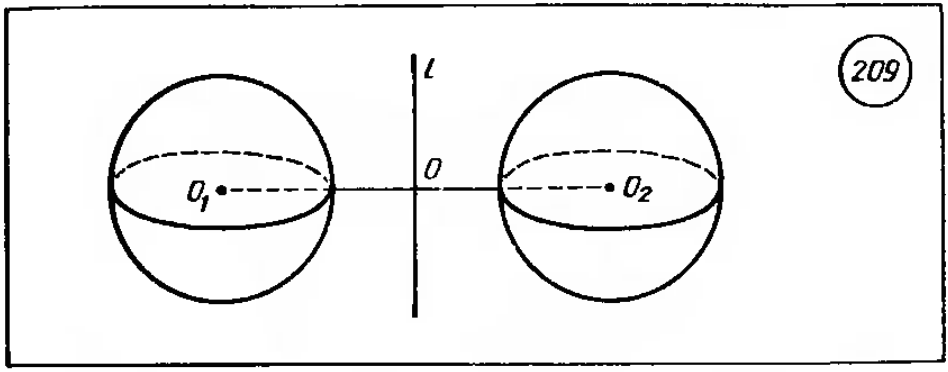
Если преобразование симметрии относительно прямой *l* переводит фигуру *F* в себя, то фигура называется *симметричной относительно прямой l*, а прямая *l* называется *осью симметрии фигуры*.

Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 210, *а*). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 210, *б*). Окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр (рис. 210, *в*). Все эти фигуры плоские.

В пространстве, как и на плоскости, много примеров фигур, имеющих оси симметрии. На рисунке 211 изображены такие фигуры: это прямоугольный параллелепипед, конус, правильная четырехугольная пирамида.

3. Симметрия относительно плоскости. Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X опускают перпендикуляр на плоскость α (O — точка пересечения его с плоскостью α) и на его продолжении за точку O





откладывают отрезок OX_1, равный OX. Точки X и X_1 называют *симметричными относительно плоскости* α (рис. 212).

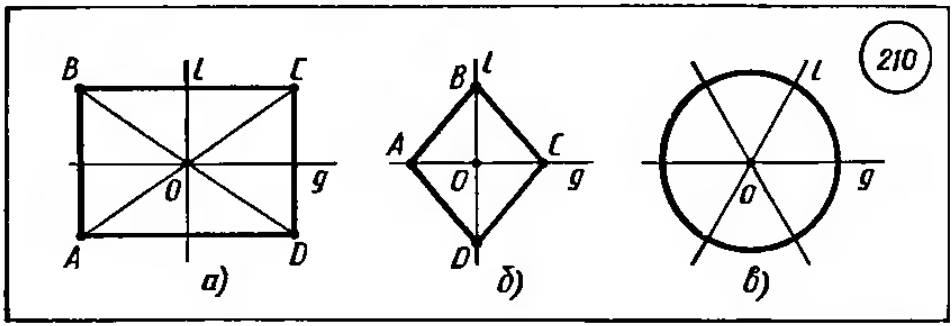
Преобразование фигуры F в F_1, при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X_1, симметричную X относительно плоскости α, называется *преобразованием симметрии относительно плоскости* α. При этом фигуры F и F_1 называются *симметричными относительно плоскости* α.

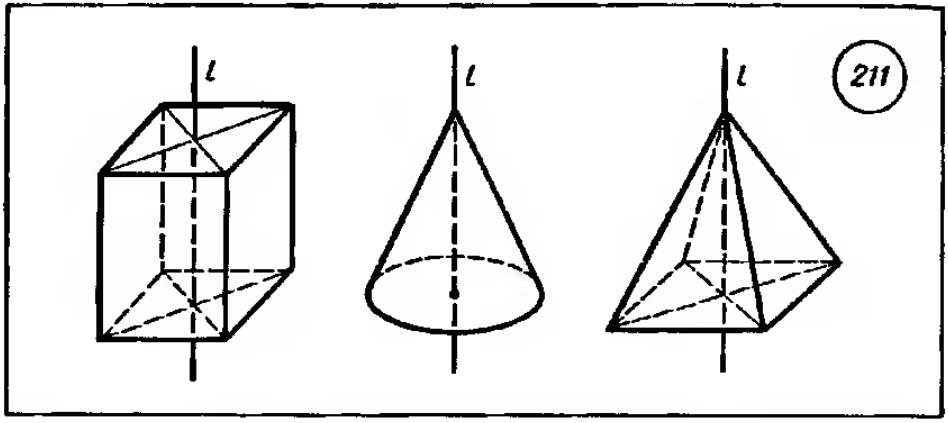
На рисунке 213 изображены две сферы, симметричные относительно плоскости α.

Если преобразование симметрии относительно плоскости переводит фигуру в себя, то фигура иазывается *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии.*

На рисунке 214 изображены две плоскости симметрии сферы. Заметим, что у сферы таких плоскостей симметрии бесконечное множество. У куба также имеются плоскости симметрии. На рисунке 215 изображеиы две из них.

4. Гомотетия. Пусть F — данная фигура и O — фиксированиая точка (рис. 216). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на ием отрезок OX_1, равный kOX, где k — положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, построенную указанным способом, называется *гомотетией* относительно





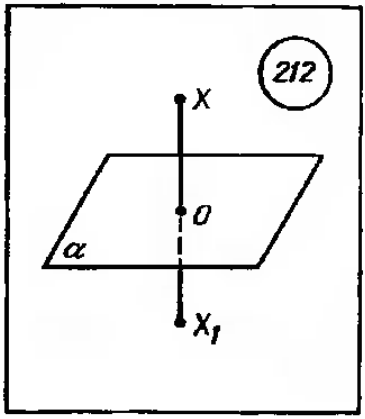
центра O. Число k называется *коэффициентом гомотетии*. Фигуры F и F_1 называются *гомотетичными*. На рисунке 216 четырехугольник $X_1Y_1Z_1U_1$ гомотетичен четырехугольнику $XYZU$ с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии $k=2$.

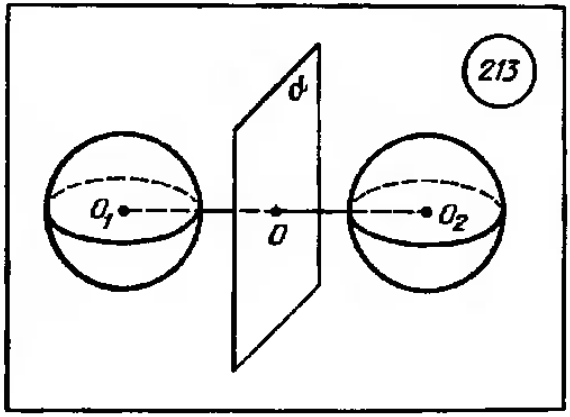
На рисунке 217 $\triangle A_1B_1C_1$ гомотетичен $\triangle ABC$ с центром O и коэффициентом гомотетии, равным 1,6.

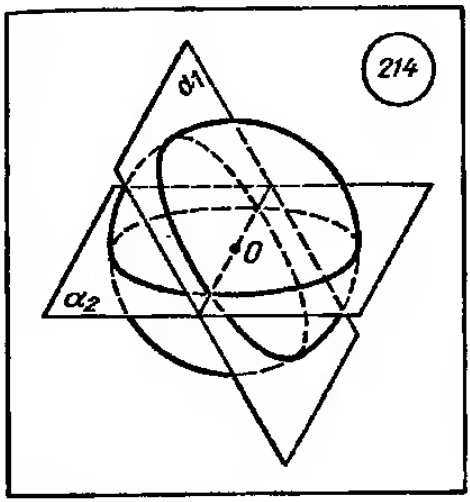
На рисунке 218 изображены две гомотетичные сферы с коэффициентом гомотетии 2.

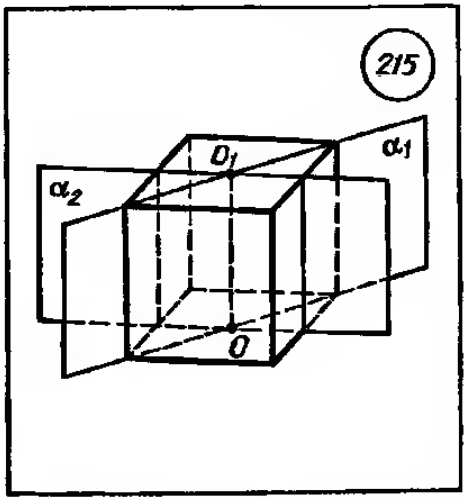
Пример. В данную правильную четырехугольную пирамиду вписать куб так, чтобы четыре его вершины лежали на ребрах, а четыре — на основании пирамиды.

Решение. Проведем любое сечение $A_1B_1C_1D_1$ пирамиды с вершиной S, параллельное ее основанию (рис. 219). На этом сечении (квадрате) как на верхнем основании строим куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Взяв в качестве центра гомотетии вершину S пирамиды, проведем полупрямые SA_2, SB_2, SC_2, SD_2 (на рисунке их нет). Точки A', B', C', D' их пересечения с основанием пирамиды (точнее, с диагоналями основания) будут вершинами







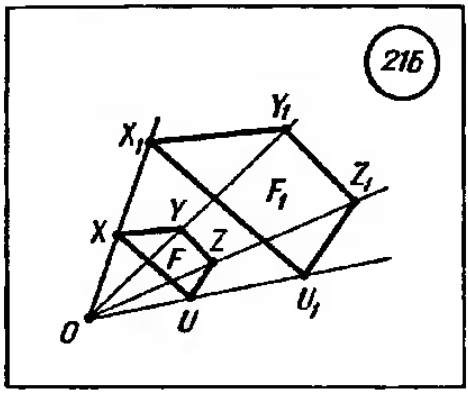


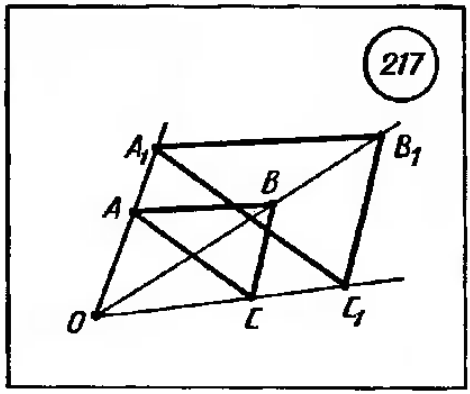
одного из оснований искомого куба. Вершины A, B, C, D другого основания получим, если через A', B', C', D' проведем прямые, параллельные A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1, D_2D_1 до пересечения с ребрами пирамиды.

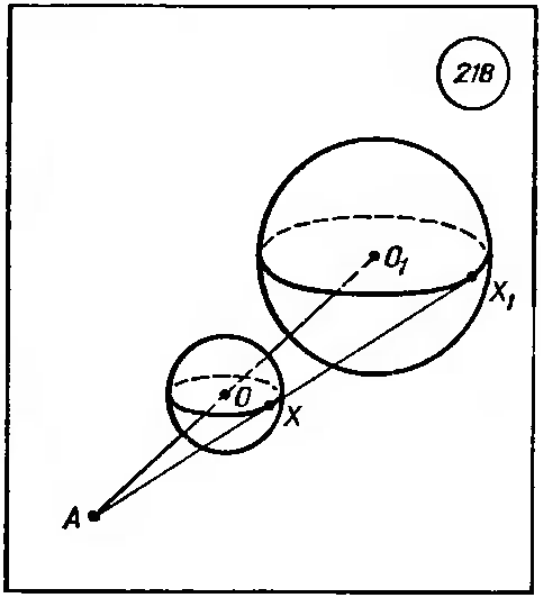
76. Понятие движения. Свойства движений. Определение движения одинаково и в плоскости, и в пространстве. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки A и B фигуры F в точки A_1 и B_1 фигуры F_1 так, что $AB=A_1B_1$. Рассмотренные в п. 75 симметрии относительно точки, прямой и плоскости являются движениями.

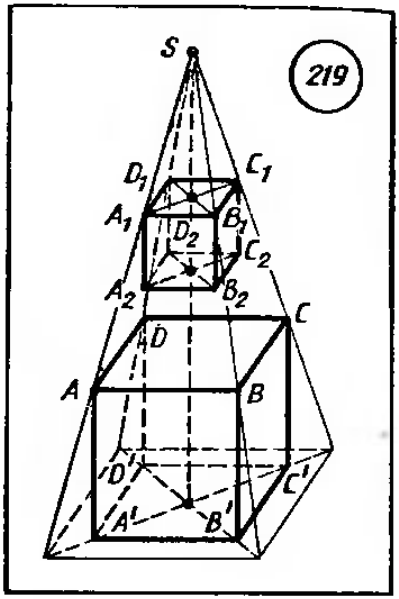
Т.5.1. | Преобразование симметрии относительно точки является движением.

Т.5.2. | Преобразование симметрии относительно прямой является движением.









Т.5.3. | **Преобразование симметрии относительно плоскости является движением.**

Сформулируем некоторые свойства движения.

Т.5.4. | **При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.**

Из теоремы 5.4 следует, что при движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.

При движении сохраняются углы между полупрямыми. При движении плоскость переходит в плоскость.

Рассмотрим еще два движения — поворот на плоскости и вращение вокруг осн в пространстве.

Поворотом на плоскости около данной точки называется такое движение, прн котором каждый луч, нсходящий иэ данной точки, поворачивается на однн н тот же угол в одном и том же направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки). На рисунке 220 $\triangle ABC$ повернут на 60° по часовой стрелке около данной токи O. Углы между лучами OA и OA_1, OB и OB_1, OC и OC_1 равны 60°.

Вращением вокруг оси на угол φ называется преобразованиие пространства, при котором:

1) имеется единственная прямая l, все точки которой переходят сами в себя;

2) любая точка A, не принадлежащая l, переходит в такую точку A_1, что:

а) точки A и A_1 лежат в плоскости α, перпендикулярной l;

б) $\angle AOA_1 = \varphi$ является постоянным по величине и направлению (точка O есть точка пересечения плоскости α с осью l).

Прямую l называют *осью вращения*, угол φ — *углом вращения* (рис. 221).

Неподвижными элементами вращения являются точки оси вращения, а также все плоскости, перпендикулярные этой оси. Если $\varphi = 2\pi m$, $m \in Z$, то вращение можно считать тождественным преобразованием.

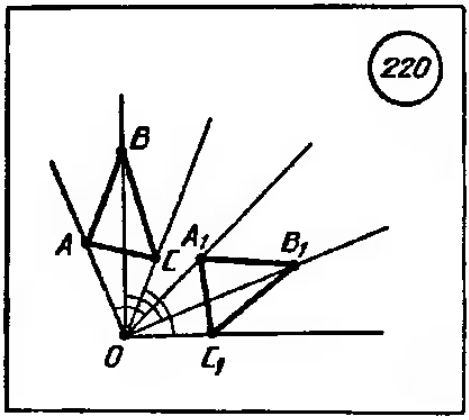
Симметрию относительно прямой можно рассматривать как частный случай вращения, когда $\varphi = \pi$.

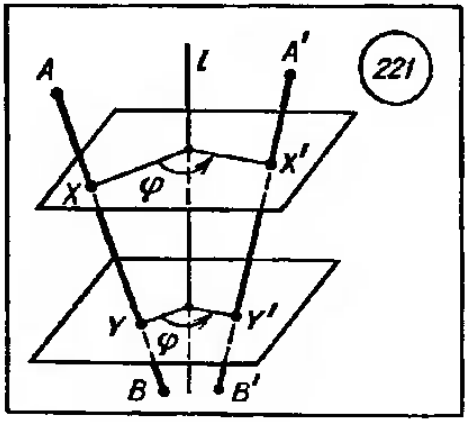
Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение. Результат выполнения этих движений называется *композицией* движений.

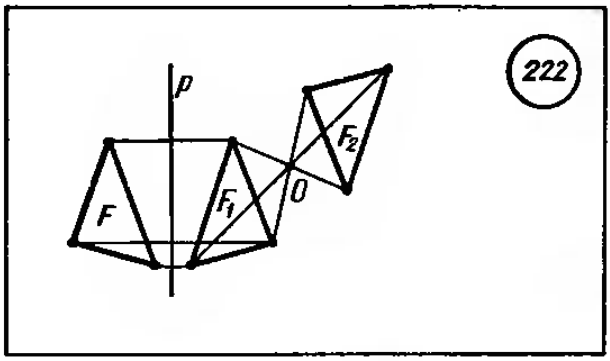
На рисунке 222 изображено последовательное выполнение двух движений, фигура F_1 получена из фигуры F симметрией относительно оси p, а фигура F_2 получена из фигуры F_1 симметрией относительно точки O, в результате последовательного выполнения этих движений сохранились расстояния между соответствующими точками, а значит, фигура F_2 получена из фигуры F движением.

Композиция двух вращений с одной и той же осью есть вращение.

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1. Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X_1 фигуры F_1. Преобразование фигуры F_1 в фигуру F, при котором точка X_1 перейдет в точку X, называется *преобразованием, обратным данному*. Преобразование, обратное движению, является также движением.







Как на плоскости, так и в пространстве рассматриваются равные фигуры. Фигуры F и F_1 называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую. Для обозначения равенства фигур употребляется знак равенства. Запись $F=F_1$ означает, что фигура F равна F_1.

На рисунке 213 шары симметричны относительно плоскости, а значит, они равны. На рисунке 205 кубы симметричны относительно точки, а значит, они равны. На рисунке 222 треугольники F, F_1, F_2 равны, так как все они получены один из другого в результате движения.

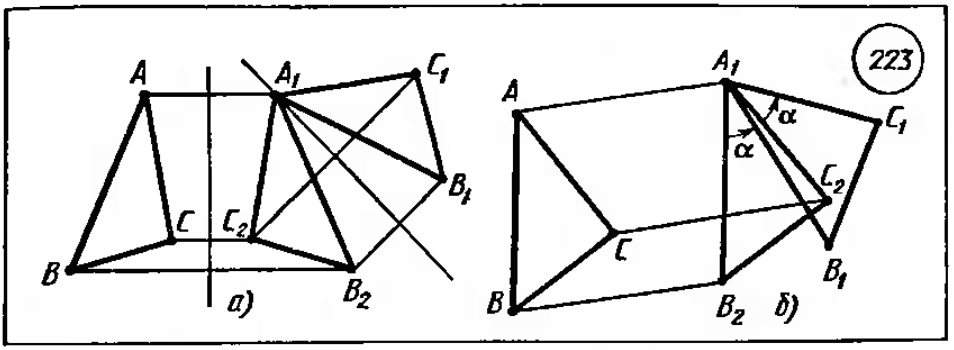
Пример 1. На рисунке 223 изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Доказать, что эти треугольники совмещаются движением, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1.

Решение. Решение задачи зависит от расположения треугольников.

1) На рисунке 223, *а* изображен один из возможных вариантов. $\triangle A_1B_2C_2$ получен из $\triangle ABC$ при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку AA_1. $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle A_1B_2C_2$ при симметрии относительно прямой, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_2B_1. Мы знаем, что последовательное выполнение движений есть движение. Таким образом, $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle ABC$ движением.

2) На рисунке 223, *б* изображен другой вариант. $\triangle A_1B_2C_2$ получен из $\triangle ABC$ параллельным переносом (см. п. 79) в направлении, заданном лучом AA_1 на расстояние AA_1. Далее, $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle A_1B_2C_2$ поворотом на угол α против часовой стрелки. Вывод аналогичен первому случаю.

Пример 2. Даны две концентрические окружности. Построить ромб, отличный от квадрата, так, чтобы: 1) две вершины его принадлежали одной окружности, а две оставшиеся — другой; 2) три вершины принадлежали одной окружности, а одна — другой.



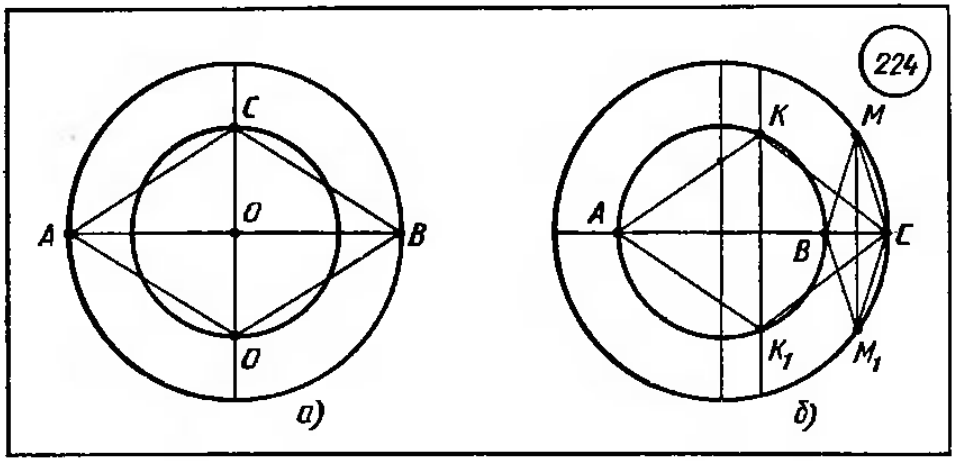
Решение. 1) Построим любой диаметр AB одной окружности и перпендикулярный ему диаметр CD другой окружности (рис. 224, *а*). Диагонали полученного четырехугольника $CBDA$ в точке пересечения делятся пополам, значит, $CBDA$ — параллелограмм (п. 25). Из симметрии отрезков AC и BC относительно оси CD следует равенство сторон параллелограмма, т. е. $CBDA$ — ромб (п. 26).

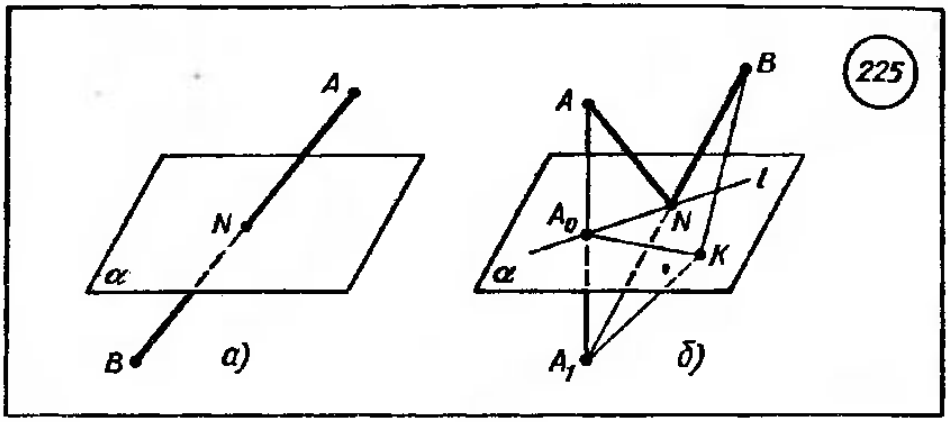
2) Диаметр AB меньшей окружности продолжим до пересечения в точке C с большей окружностью. Построим оси симметрии отрезков AC и BC (рис. 224, *б*). Мы получим два ромба, удовлетворяющие условию задачи: $BMCM_1$ и $AKCK_1$. Доказательство правильности построения проведите самостоятельно.

Аналогично можно в первом случае построить еще один ромб, а во втором — еще два.

Пример 3. Даны плоскость α и две точки A и B вне ее. Найдите на плоскости α такую точку N, чтобы сумма ее расстояний от A и B, т. е. $AN+NB$, была наименьшей.

Решение. Если точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α, то очевидно, что искомая точка N —





точка пересечения прямой AB с плоскостью α (рис. 225, *а*).

Если же точки A и B расположены по одну сторону от плоскости α (рис. 225, *б*), то искомая точка N получится при пересечении прямой A_1B с плоскостью α, где A_1 — точка, симметричная точке A относительно плоскости α. Докажем, что точка N искомая. N находится на прямой l, которая перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину ($A_0N \perp AA_1$), а поэтому $AN=A_1N$, отсюда $AN+NB=A_1N+NB$. Возьмем на плоскости α произвольную точку K, отличную от N (рис. 225, *б*). Соединив точки A_0 и K, получим отрезок A_0K, перпендикулярный отрезку AA_1 и проходящий через его середину A_0, поэтому $AK=A_1K$. Отсюда вытекает, что $AK+KB=A_1K+KB$. Из $\triangle A_1KB$ имеем, что $A_1K+KB>A_1B$. Так как $A_1B=AN+NB$, то ясно, что $A_1K+KB>AN+NB$.

Таким образом, приходим к выводу, что сумма $AN+NB$ имеет наименьшее значение, и, следовательно, N — искомая точка.

§ 20. Подобие фигур

77. Преобразование подобия. Определение преобразования подобия одинаково и на плоскости, и в пространстве. Преобразование фигуры в фигуру называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Это значит, что если произвольные точки A и B фигуры F при этом преобразовании переходят в точки A_1 и B_1 фигуры F_1, то $A_1B_1=kAB$, где $k>0$.

Число k называется *коэффициентом подобия* ($k>0$). При $k=1$ преобразование подобия является движением.

Т.5.5. | Гомотетия есть преобразование подобия.

Рассмотрим свойства преобразования подобия.

1. При преобразовании подобия три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1 и C_1, также лежащие на одной прямой. Причем если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

2. Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки, плоскости в плоскости.

3. Преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.

4. Не всякое преобразование подобия является гомотетией.

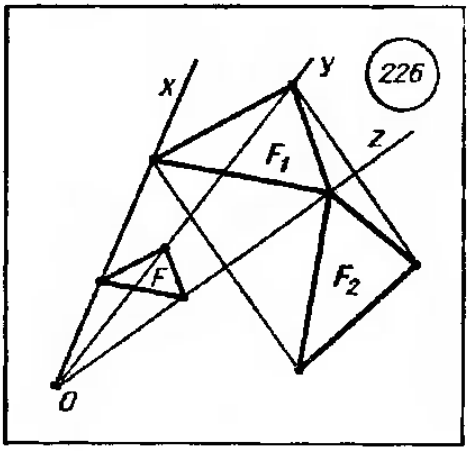
На рисунке 226 фигура F_1 получена из фигуры F гомотетией, а фигура F_2 получена из фигуры F_1 симметрией относительно прямой z. Преобразование фигуры F в F_2 есть преобразование подобия, так как при нем сохраняются отношения расстояний между соответствующими точками, однако это преобразование не является гомотетией.

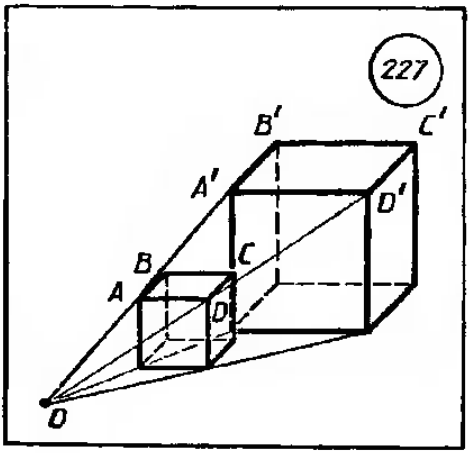
Для гомотетии в пространстве верна теорема:

Т.5.6. Преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость или в себя.

На рисунке 227 изображены два гомотетичных куба с коэффициентом гомотетии, равным 2. По Т.5.6 плоскость $ABCD$ переходит в параллельную ей плоскость $A'B'C'D'$. Это же можно сказать и о плоскостях других граней куба.

78. Подобные фигуры. Две фигуры F и F_1 называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур употребляется символ $\sim$. Запись $F_1 \sim F$ читается так: «Фигура F_1 подобна фигуре F».





Из свойств преобразования подобия следует, что у подобных многоугольников соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

В записи $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B — в B_1, C — в C_1.

Для подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ верны равенства: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Два треугольника подобны, если у них соответствующие углы равны и соответствующие стороны пропорциональны.

Сформулируем *признаки подобия* треугольников.

Т.5.7. Два треугольника подобны, если:

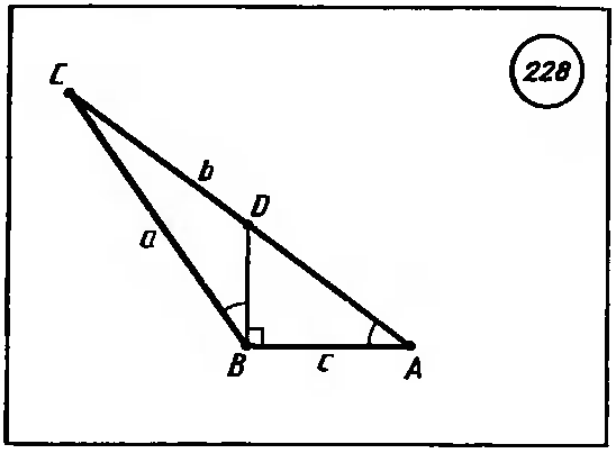
1) два угла одного соответственно равны двум углам другого;

2) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны;

3) стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

Пример. Дан $\triangle ABC$, в котором $\angle B = 90° + \angle A$. Найти зависимость между сторонами a, b и c этого треугольника.

Решение. Проведем $BD \perp AB$ (рис. 228). Тогда $\angle A = \angle DBC$, $\angle CDB$ — внешний угол $\triangle ABD$, т. е. $\angle CDB = 90° + \angle A$, а значит, $\angle CDB = \angle CBA$, $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ по двум углам (Т.5.7). Из подобия треугольников следует $\frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}$, откуда $CD = \frac{a^2}{b}$, $BD = \frac{ac}{b}$, $AD = AC - CD = \frac{b^2 - a^2}{b}$. Из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $AD^2 = BD^2 + AB^2$, откуда $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.



ГЛАВА VI. ВЕКТОРЫ

§ 21. Введение понятия вектора

79. Параллельный перенос. Введем на плоскости декартовы координаты. Преобразование плоской фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y+b)$, где a и b — постоянные, называется *параллельным переносом на плоскости.*

На рисунке 229 фигура F_1 получена из фигуры F параллельным переносом. Точка $A(x; y)$ переходит при этом преобразовании в точку $B(x+a; y+b)$. Параллельный перенос задается формулами $x_1=x+a$, $y_1=y+b$. Эти формулы выражают координаты точки $B(x_1; y_1)$, в которую переходит точка $A(x; y)$ при параллельном переносе.

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x; y; z)$ фигуры F переходит в точку $(x+a; y+b; z+c)$, где a, b и c — постоянные. Параллельный перенос в пространстве задается формулами $x_1=x+a$, $y_1=y+b$, $z_1=z+c$.

На рисунке 230 призма $ABCA_1B_1C_1$ при параллельном переносе переходит в призму $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$.

Сформулируем некоторые свойства параллельного переноса:

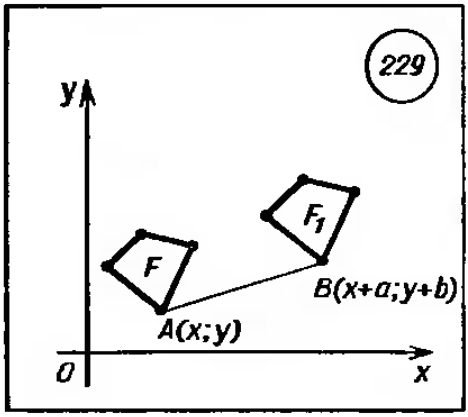
1. Параллельный перенос есть движение.

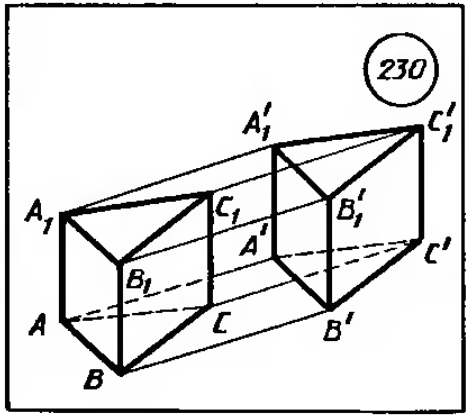
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

3. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

4. Каковы бы ни были две точки A и A_1, существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1.

5. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть





параллельный перенос. Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос.

6. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Пример 1. Прямые, которым принадлежат боковые стороны трапеции, перпендикулярны. Доказать, что отрезок, концами которого являются середины оснований трапеции, равен полуразности оснований.

Решение. Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$, M — середина BC, N — середина AD. При параллельном переносе в направлении полупрямой BM на расстояние BM точка B переходит в точку M, точка A переходит в точку A_1. При параллельном переносе в направлении полупрямой CM на расстояние CM точка C переходит в точку M, точка D — в точку D_1 (рис. 231). Тогда

$$A_1N = AN - AA_1 = AN - BM; \quad (1)$$

$$ND_1 = ND - D_1D = ND - MC. \quad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC.$$

Но $A_1N + ND_1 = A_1D_1$, значит,

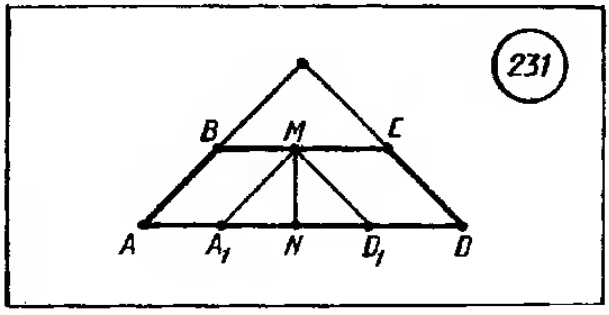
$$A_1D_1 = AD - BC. \quad (3)$$

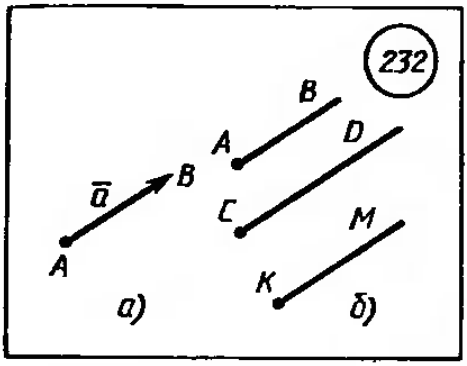
Так как $A_1N = ND_1$, то MN — медиана образовавшегося прямоугольного треугольника A_1MD_1. Поэтому $MN = \frac{1}{2}(A_1N + ND_1)$.

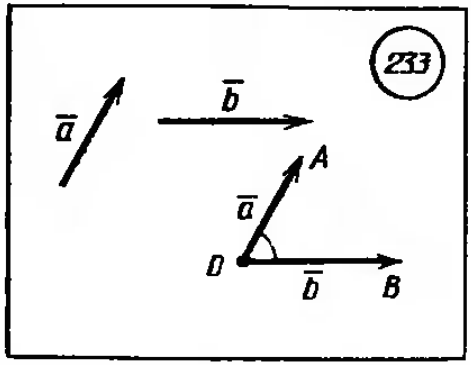
Учитывая равенство (3), получаем:

$$MN = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

80. Понятие вектора. Некоторые физические величины, такие, как сила, скорость, ускорение и др., характеризуются не только числовым значением, но и направлением. В связи с этим указанные физические величины удобно изображать направленными отрезками.







Направленный отрезок называется *вектором*. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a, b, c, ... Иногда вектор обозначают указанием концов отрезка, изображающего вектор. Например, на рисунке 232, *а* изображен вектор AB. Точка A называется началом, а точка B — концом вектора AB. При обозначении вектора с помощью концов изображающего его отрезка на первом месте всегда ставится начало вектора. Над буквенным обозначением ставится стрелка или черта. Напрнмер, запись $\bar{a}$ читается: «Вектор a».

Две полупрямые называются *одинаково направленными*, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c одинаково направлены.

На рисунке 232, *б* полупрямые AB и CD одинаково направлены, CD и KM тоже одинаково направлены, а значит, полупрямые AB и KM одинаково направлены.

Две полупрямые называются *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются одинаково направленными, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. Аналогично определяются противоположно направленные векторы.

Абсолютной величиной (или *модулем*) *вектора* называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.

Обратно: если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называют *нулевым вектором*. Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой $\bar{0}$. О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Все нулевые векторы по определению равны.

Из свойств параллельного переноса (п. 79) следует, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол BAC. *Углом между* любыми *двумя векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

На рисунке 233 даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Отложим от данной точки O векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$. Тогда $\angle AOB$ есть угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

81. Координаты вектора. Пусть вектор $\bar{a}$ на плоскости имеет началом точку $A(x_1; y_1)$, а концом точку $B(x_2; y_2)$ (рис. 234). *Координатами вектора* будем называть числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\bar{a}(a_1; a_2)$ или просто $(a_1; a_2)$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Из формулы расстояния между двумя точками (см. п. 66) следует, что абсолютная величина вектора $(a_1; a_2)$ равна $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

На рисунке 234 вектор $\overline{AB}$ имеет координаты a_1 и a_2, где $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

В пространстве координатами вектора с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называются числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. Можно доказать такую теорему:

Т.6.1. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно: если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

§ 22. Операции над векторами

82. Сумма векторов. *Суммой векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на плоскости с координатами $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$ называется вектор $\bar{c}$ с координатами $(a_1+b_1; a_2+b_2)$, т. е. $\bar{a}(a_1; a_2)+\bar{b}(b_1; b_2)=\bar{c}(a_1+a_2; b_1+b_2)$.

Для любых векторов $\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$, $\bar{c}(c_1; c_2)$

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}, \quad \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

Т.6.2. Каковы бы ни были точки A, D, C, имеет место векторное равенство $\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC}$.

Эта теорема дает следующий способ построения суммы произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}_1$, равный вектору $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}_1$, является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 235, *а*). Такой способ сложения двух векторов называется *правилом треугольника*.

Имеет место такое векторное равенство: $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$, где A, B, C и D — вершины параллелограмма $ABCD$. Это еще одно правило сложения векторов — *правило параллелограмма*.

Если даны два вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, то суммой векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ будет вектор $\overline{OC}$, где $OACB$ — параллелограмм (рис. 236).

Разностью векторов $\bar{a}(a_1; a_2)$ и $\bar{b}(b_1; b_2)$ *на плоскости* называется такой вектор $\bar{c}(c_1; c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$, т. е. координаты вектора $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ таковы:

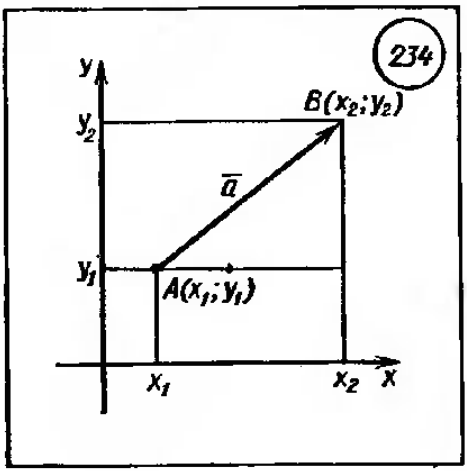
$$c_1=a_1-b_1, \quad c_2=a_2-b_2.$$

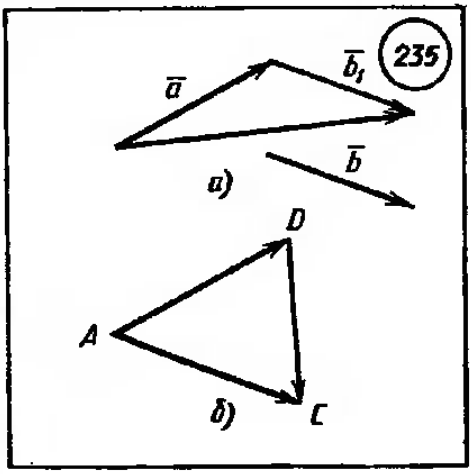
Если даны векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (с общим началом), то разностью векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ является вектор $\overline{DC}$ (рис. 235, *б*):

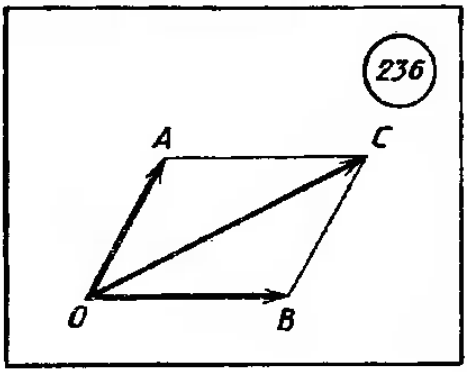
$$\overline{AC}-\overline{AD}=\overline{DC}.$$

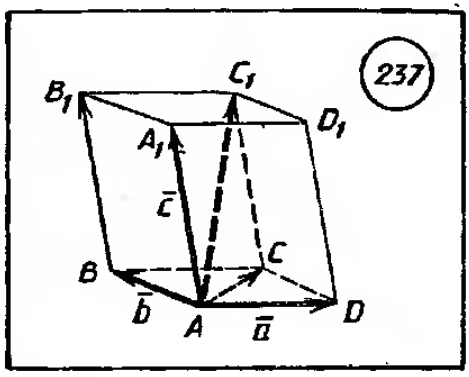
Это правило следует использовать при нахождении разности векторов.

Суммой векторов $\bar{a}(a_1; a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ *в пространстве* называется вектор $\bar{c}(a_1+a_2; b_1+b_2; c_1+c_2)$.









Так же как и на плоскости, доказывается векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Правило параллелограмма для суммы двух векторов, непараллельных одной прямой, в пространстве сохраняется.

Сумма трех векторов, непараллельных одной плоскости, находится по *правилу параллелепипеда*. На рисунке 237 вектор $\overline{AC_1}$ равен сумме векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, отложенных от одной точки A, при этом отрезок AC_1 является диагональю параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

83. Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. *Произведением вектора* $(\overline{a_1;\ a_2})$ *и числа* λ называется вектор $(\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$, т. е. $(\overline{a_1;\ a_2})\lambda=(\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что для любого вектора $\bar{a}$ и чисел λ, μ

$$(\lambda+\mu)\cdot\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}.$$

Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа λ

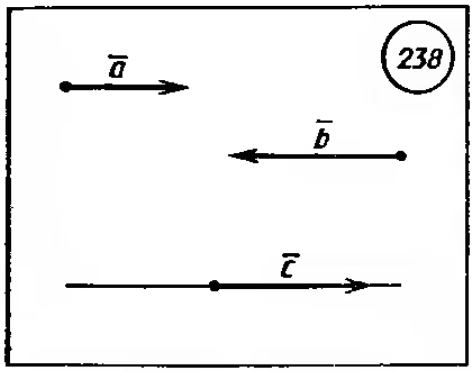
$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}.$$

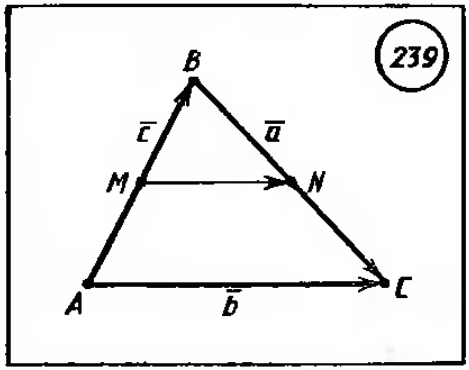
Т.6.3. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$. Направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a}\neq\bar{0}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$.

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направление положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами* или *ортами*.

Координатные векторы на плоскости принято называть $\bar{e}_1$ (1; 0) на оси x и $\bar{e}_2$ (0; 1) на оси y. Любой вектор $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ представляется в виде

$$\bar{a}\ (a_1;\ a_2)=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2.$$





Произведением вектора $\bar{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ в пространстве и числа λ называется вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$. Так же как и на плоскости, абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ $(\bar{a}\neq 0)$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора a, если $\lambda<0$.

Для вектора в пространстве имеет место разложение:

$$\bar{a}\,(a_1; a_2; a_3)=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3,$$

где $\bar{e}_1\,(1; 0; 0)$, $\bar{e}_2\,(0; 1; 0)$, $\bar{e}_3\,(0; 0; 1)$ — координатные векторы.

Два отличных от нуля вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. На рисунке 238 векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ коллинеарные.

Т.6.4. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно: если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Пример 1. Доказать, что средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине этой стороны.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 239). Пусть $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Тогда по правилу треугольника $\bar{c}+\bar{a}=\bar{b}$ (п. 82).

Пусть M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC, тогда $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}=$
$=\frac{1}{2}(\bar{c}+\bar{a})=\frac{1}{2}\bar{b}$.

Так как $\overline{AC}=\bar{b}$ и $\overline{MN}=\frac{1}{2}\bar{b}$, то $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Таким образом, $\overline{MN}$ сонаправлен с $\overline{AC}$, следовательно, $AC\parallel MN$. Так как $\overline{MN}=$
$=\frac{1}{2}\overline{AC}$, то $MN=\frac{1}{2}AC$.

Пример 2. Коллинеарны ли следующие векторы: а) $\bar{a}(3; 6; 8)$ и $\bar{b}(6; 12; 16)$; б) $\bar{c}(1; -1; 3)$ и $\bar{d}(2; 3; 15)$; в) $\bar{i}(1; 0; 0)$ и $\bar{k}(0; 1; 0)$; г) $\bar{m}(0; 0; 0)$ и $\bar{n}(5; 7; -3)$; д) $\bar{p}\left(\frac{1}{3}; -1; 5\right)$ и $\bar{q}(-1; -3; -15)$?

Решение. а) Координаты вектора $\bar{a}(3; 6; 8)$ пропорциональны координатам вектора $\bar{b}(6; 12; 16)$, так как $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=k$. Поэтому $\bar{a}=k\bar{b}$, и, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\bar{c}(1; -1; 3)$ не пропорциональны координатам вектора $\bar{d}(2; 3; 15)$; например, $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$, поэтому векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ не коллинеарны. В самом деле, если предположить, что векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ коллинеарны, то существует число k, такое, что $\bar{c}=k\bar{d}$. Но в таком случае координаты вектора $\bar{c}$ пропорциональны координатам вектора $\bar{d}$, что противоречит условию задачи.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

84. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением векторов* $\bar{a}(a_1; a_2)$ и $\bar{b}(b_1; b_2)$ на плоскости называется число $a_1b_1+a_2b_2$. Для скалярного произведения векторов употребляется такая же запись, как и для произведения чисел.

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$. Очевидно,

$$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2.$$

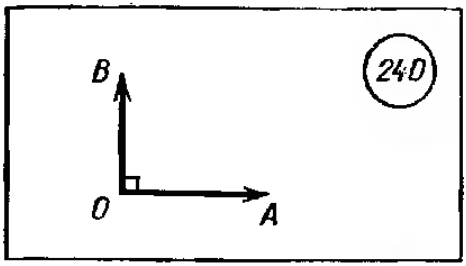
Из определения скалярного произведения векторов следует, что для любых векторов $\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$, $\bar{c}(c_1; c_2)$

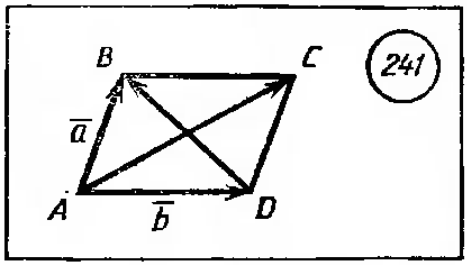
$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}.$$

Т.6.5. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

Пусть нам даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, угол между которыми α, тогда $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=AB\cdot CD\cdot\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{AB\cdot CD}$.

Из Т.6.5. следует, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. И обратно: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.





На рисунке 240 изображены векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, для которых $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$. Если $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, то угол между ними равен 90°, т. е. эти векторы лежат на перпендикулярных прямых.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ *в пространстве* называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Для скалярного произведения двух векторов в пространстве справедлива теорема 6.5.

Пример 1. Даны векторы $\bar{a}(1; 4)$ и $\bar{b}(-3; 2)$. Найти такое число λ, при котором вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ перпендикуляреи вектору $\bar{b}$.

Решение. Векторы $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0.

Вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ имеет координаты $1-3\lambda$ и $4+2\lambda$, тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ и $\bar{b}$ равно

$$(1-3\lambda)(-3)+(4+2\lambda)\cdot 2=5+13\lambda,$$

$$5+13\lambda=0, \text{ т. е. } \lambda=-\frac{5}{13}.$$

Итак, при $\lambda=-\frac{5}{13}$ векторы $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

Пример 2. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

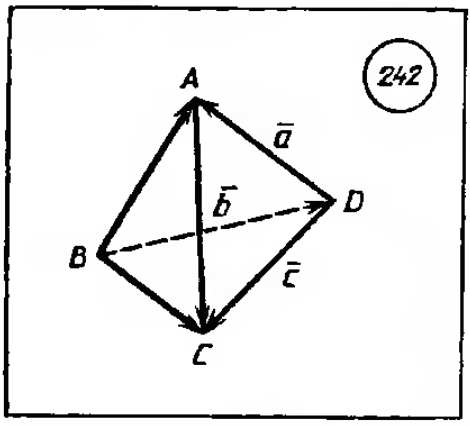
Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 241). Пусть $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$, причем $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|=a$, $|\overline{AD}|=|\overline{BC}|=b$.

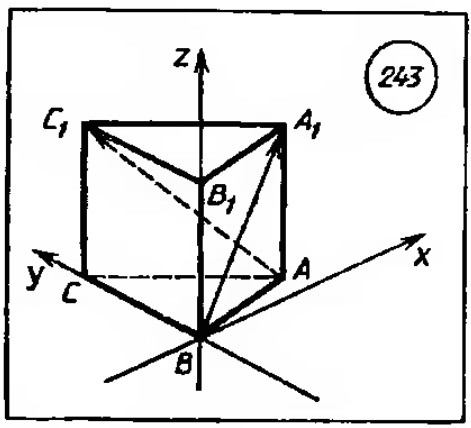
По правилам сложения и вычитания векторов (п. 82).

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}, \quad \overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD},$$
$$\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}, \qquad \overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}.$$

Используя свойства скалярного квадрата, получим $\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2+\bar{a}^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=2a^2+2b^2$, т. е. $AC^2+DB^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Пример 3. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра AD и BC, а также BD и AC взаимно перпендикулярны. До-





казать, что противоположные ребра CD и AB также взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть $\overline{DA}=\bar{a}$, $\overline{BD}=\bar{b}$, $\overline{DC}=\bar{c}$ (рис. 242). Отсюда $\overline{BA}=\bar{b}+\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{c}-\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{c}+\bar{b}$. По условию $AD\perp BC$ и $BD\perp AC$, поэтому $\overline{DA}\perp\overline{BC}$ и $\overline{BD}\perp\overline{AC}$. Следовательно, $\bar{a}(\bar{c}+\bar{b})=0$ и $\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{a})=0$, откуда $-\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ и $\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{a}$. Из этих двух равенств следует, что $-\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ или $(\bar{b}+\bar{a})\cdot\bar{c}=0$. Но $\bar{b}+\bar{a}=\overline{BA}$, $\bar{c}=\overline{DC}$, поэтому $\overline{BA}\cdot\overline{DC}=0$, и, значит, $AB\perp CD$.

Пример 4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1:AB=\sqrt{2}$ (рис. 243). Найти угол между прямыми AC_1 и A_1B.

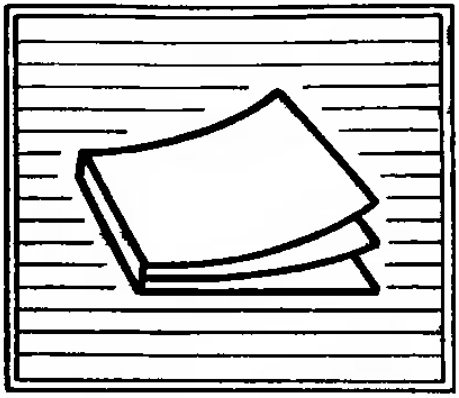
Решение. Пусть $AB=a$, тогда $AA_1=a\sqrt{2}$. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 243. Тогда вершины A, B, A_1, C_1 имеют следующие координаты: $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$, $C_1(0;\ a;\ a\sqrt{2})$ (объясните почему). Отсюда находим координаты векторов $\overline{AC_1}$ и $\overline{BA_1}$.

$$\overline{AC_1}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right),\ \overline{BA_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right).$$

Векторы $\overline{AC_1}$ и $\overline{BA_1}$ принадлежат прямым AC_1 и BA_1, искомый угол между которыми обозначим через φ. По Т.6.5 получаем $\cos\varphi=\frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{BA_1}}{AC_1\cdot BA_1}=$

$$=\frac{-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}}=\frac{1}{2},\ \text{отсюда}\ \varphi=60°.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ



Основные формулы и соотношения 388
Предметный указатель . . . 405

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

I. Основные законы алгебры

Для любых действительных чисел a, b, c справедливы равенства:

$a+b=b+a$ *(переместительный закон сложения),*

$a+(b+c)=(a+b)+c$ *(сочетательный закон сложения),*

$a+0=a$,

$a+(-a)=0$,

$ab=ba$ *(переместительный закон умножения),*

$a(bc)=(ab)c$ *(сочетательный закон умножения),*

$a(b+c)=ab+ac$ *(распределительный закон умножения относительно сложения),*

$a\cdot 1=a$,

$a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$.

II. Деление с остатком

Если m, n, p, r — натуральные числа, причем m — делимое, n — делитель, p — частное и r — остаток $(r<n)$, то

$$m=np+r.$$

III. Числовые неравенства

Если $a>b$, то $b<a$.

Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Если $a>b$, то $a+c>b+c$.

Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.

Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, причем $a>b$ и $c>d$, то $ac>bd$.

Если $a>b>0$ и n — натуральное число, то $a^n>b^n$.

IV. Модуль действительного числа и свойства модулей

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases} \textit{(определение модуля).}$$

$|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$,
$|ab| = |a| \cdot |b|$, $|a|^2 = a^2$,
$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

V. Расстояние $\rho(A; B)$ между двумя точками A и B

1) координатной прямой при $A(a)$ и $B(b)$:

$$\rho(A; B) = |a - b|;$$

2) координатной плоскости при $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

VI. Разложение на множители

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$,
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$,
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$,
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,
$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

VII. Арифметический корень и его свойства

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a} = x$ означает: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^n = a$ *(определение арифметического корня)*.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \qquad \sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k},$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \qquad \sqrt{a^2} = |a|.$$

VIII. Степень с рациональным показателем

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$, $a^1 = a$ *(определение степени с натуральным показателем)*,

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, где $a \geqslant 0$ *(определение степени с положительным дробным показателем)*,

$a^0 = 1$, где $a \neq 0$ *(определение степени с нулевым показателем)*,

$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$, где $a>0$ *(определение степени с отрицательным рациональным показателем),*

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2},\qquad (a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1 r_2},\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}.$$
$$a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2},\qquad (ab)^r=a^r b^r,$$

IX. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *(формула корней квадратного уравнения),*

$x_{1,2}=\frac{\sqrt{k^2-ac}}{a}$, где $k=\frac{b}{2}$ *(формула корней квадратного уравнения в случае, если b — четное число).*

Теорема Виета. *Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то*

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1x_2=q.$$

X. Стандартный вид положительного числа

$$a=a_1\cdot 10^n,$$

где $1\leqslant a_1<10$, n — целое число (порядок числа a).

XI. Погрешности

Если a — приближенное значение числа α, то

$|\alpha-a|$ — *абсолютная погрешность,*

$\frac{|\alpha-a|}{|a|}\cdot 100\%$ — *относительная погрешность.*

XII. Логарифмы

Запись $\log_a b=x$ означает, что $a^x=b$; здесь $a>0$, $a\neq 1$ *(определение логарифма).*

$\lg b$ — сокращенная запись для $\log_{10} b$ *(десятичный логарифм).*

$\lg 1=0$, $\lg 10=1$, $\lg 100=2$, $\lg 1000=3$, ..., $\lg 10^n=n$.
$\lg 0{,}1=-1$, $\lg 0{,}01=-2$, $\lg 0{,}001=-3$, ..., $\lg 10^{-n}=-n$.

$\ln x$ — сокращенная запись для $\log_e x$ *(натуральный логарифм),* $e=2{,}7182818284590...$; $\ln e=1$, $\ln 1=0$.

$a^{\log_a b}=b$, $10^{\lg b}=b$, $e^{\ln b}=b$,

$\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$,

$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$,

$\log_a x_1^r=r\log_a x_1$ $(x_1>0,\ x_2>0)$,

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ *(формула перехода к новому основанию)*,

$\log_a b=\log_{a^k} b^k$ $(k\neq 0)$.

XIII. Арифметическая прогрессия

$a_{n+1}=a_n+d$ *(определение арифметической прогрессии)*,

$a_n=a_1+d(n-1)$ *(формула n-го члена)*,

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ *(характеристическое свойство)*,

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ *(формула суммы n первых членов)*.

XIV. Геометрическая прогрессия

$b_{n+1}=b_n q$, $b_1\neq 0$, $q\neq 0$ *(определение геометрической прогрессии)*,

$b_n=b_1q^{n-1}$ *(формула n-го члена)*,

$b_n^2=b_{n-1}\,b_{n+1}$ *(характеристическое свойство)*,

$S_n=\frac{b_n q-b_1}{q-1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ *(формула суммы n первых членов)*,

$S=\frac{b_1}{1-q}$ *(формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при* $|q|<1$*)*.

XV. Тригонометрия

1. Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x)=-\sin x,$$
$$\cos(-x)=\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x,$$
$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\ k\in Z,$$
$$\cos(x+2\pi k)=\cos x,\ k\in Z,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x,\ k\in Z,$$
$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x,\ k\in Z.$$

2. Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов:

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Примечание. Связь между градусной и радианной мерами измерения угла:

$$1^\circ = \frac{\pi}{130} \text{ рад.}$$

3. Формулы, связывающие тригонометрические фуикции одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

5. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

6. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

8. Знаки тригонометрических функций по четвертям:

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

9. Формулы приведения:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

10. **Решение простейших тригонометрических уравнений:**
$\sin x=a$, $|a|\leqslant 1$, $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n$, $n\in Z$;
$\cos x=a$, $|a|\leqslant 1$, $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in Z$;
$\operatorname{tg} x=a$, $x=\operatorname{arctg} a+\pi n$, $n\in Z$;
$\operatorname{ctg} x=a$, $x=\operatorname{arcctg} a+\pi n$, $n\in Z$.

11. **Обратные тригонометрические функции:**

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0\leqslant \arccos x\leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}< \operatorname{arctg} x< \frac{\pi}{2}, \qquad 0< \operatorname{arcctg} x<\pi,$$

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x; \qquad \arccos(-x)=\pi-\arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x; \qquad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$$

XVI. Асимптоты графика функции $y=f(x)$

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то $y=b$ — *горизонтальная асимптота.*

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $x=a$ — *вертикальная асимптота.*

XVII. Производная

$y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ *(определение производной).*

1. **Правила дифференцирования:**

$$(u+v)'=u'+v', \quad (Cu)'=Cu',$$

$$(uv)'=u'v+uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

2. **Формулы дифференцирования:**

$C'=0$,
$(kx+b)'=k$,
$(x^r)'=rx^{r-1}$,
$(e^x)'=e^x$,
$(a^x)'=a^x\ln a$,
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$,
$(\sin x)'=\cos x$,
$(\cos x)'=-\sin x$,
$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,
$(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg} x)'=(-\operatorname{arcctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

3. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a),$$

где $x=a$ — абсцисса точки касания.

XVIII. Первообразная и интеграл

Если $F'(x)=f(x)$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ *(определение первообразной).*

1. Правила вычисления первообразных.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то

$F(x)+H(x)$ — первообразиая для $f(x)+h(x)$;

$kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$;

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$.

2. Таблица первообразных (в таблице для каждой функции дана одна из первообразных).

Функция	Первообразная
$f(x)=k$	$F(x)=kx$
$f(x)=x^r\ (r\neq -1)$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$

Функция	Первообразная
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

3. Вычисление интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$ *(формула Ньютона—Лейбница).*

4. Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, где $a<b$, и графиками фуикций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ на $[a;\ b]$:

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx.$$

ГЕОМЕТРИЯ

I. Аксиомы геометрии

Основные свойства принадлежности точек и прямых

А — I_1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
А — I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Основные свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости

А — II_2. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
А — II_2. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Основные свойства измерения отрезков и углов

А — III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.
А — III_2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, бóльшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Основные свойства откладывания отрезков и углов

А — IV_1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.
А — IV_2. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

Существование треугольника, равного данному

А — IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Основное свойство параллельных прямых

А — V. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

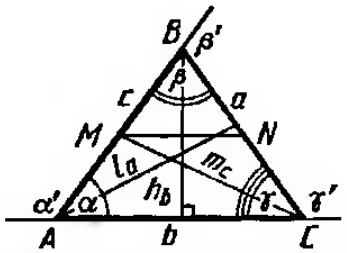
Основные свойства плоскостей в пространстве

C_1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

II. Треугольники



a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — внутреиние углы треугольника.

α', β', γ' — внешние углы треугольника.

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущеиные из вершин треугольника на прямые, содержащие соответствующие противоположные стороны a, b, c.

m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон a, b, c.

l_a, l_b, l_c — биссектрисы треугольника, соединяющие вершины треугольиика с точками на противолежащих сторонах a, b, c.

MN — средняя линия треугольника.

P — периметр треугольника.

p — полупериметр треугольника.

R — радиус окружности, описанной около треугольника.

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

$S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC.

Сумма углов треугольника

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Свойства внешних углов треугольника

$$\alpha'=\beta+\gamma,\ \beta'=\alpha+\gamma,\ \gamma'=\alpha+\beta,$$
$$\alpha'>\beta,\ \alpha'>\gamma,\ \beta'>\alpha,\ \beta'>\gamma,\ \gamma'>\alpha,\ \gamma'>\beta.$$

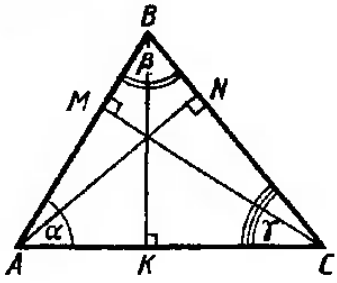
Неравенство треугольника

$$a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b.$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Если $c<a$, то $\gamma<\alpha$.
Если $c<b$, то $\gamma<\beta$.
Если $\alpha<\beta$, то $a<b$.
Если $\beta>\gamma$, то $b>c$.

Если $a>c$, то $\alpha>\gamma$.
Если $a<b$, то $\alpha<\beta$.
Если $\gamma<\alpha$, то $c<a$.
Если $\alpha>\gamma$, то $a>c$.



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Периметр и полупериметр треугольника

$$P=a+b+c,\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Свойства средней линии треугольника

$$MN\parallel AC,\quad MN=\frac{b}{2}.$$

Площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\quad S=\frac{1}{2}bh_b,\quad S=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

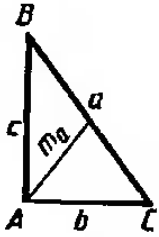
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \textit{(формула Герона)}.$$

Равнобедренный треугольник

$$a=c,\ \angle\alpha=\angle\gamma,$$
$$h_b=m_b=l_b.$$

Равносторонний треугольник

$$a=b=c,\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ;$$
$$h_a=l_a=m_a,\ h_b=l_b=m_b,\ h_c=l_c=m_c;$$
$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Прямоугольный треугольник

$\alpha=90^\circ$, b, c — катеты, a — гипотенуза,

$a^2=b^2+c^2$ *(теорема Пифагора)*;

$$R=\frac{a}{2}=m_a,\quad S=\frac{1}{2}bc,$$

$$\sin\gamma=\frac{c}{a},\ \cos\gamma=\frac{b}{a},\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{c}{b},$$

$$\sin\beta=\frac{b}{a},\ \cos\beta=\frac{c}{a},\ \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{c}.$$

III. Четырехугольники

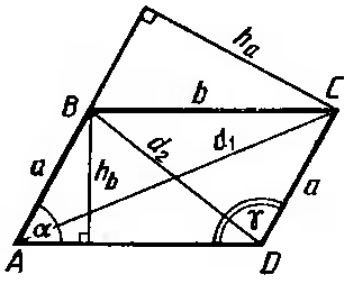
Параллелограмм

a, b — стороны параллелограмма.

h_a, h_b — высоты параллелограмма, опущенные из вершин параллелограмма на прямые, содержащие стороны параллелограмма a, b.

d_1, d_2 — диагонали параллелограмма.

α, γ — углы параллелограмма, $\alpha+\gamma=180°$.



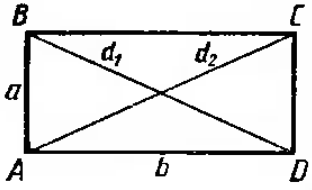
Площадь параллелограмма

$$S=ah_a,\ S=bh_b,\ S=ab\sin\alpha.$$

Связь между сторонами и диагоналями параллелограмма

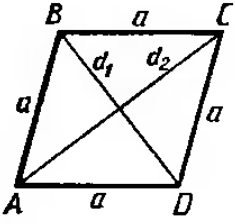
$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

Прямоугольник



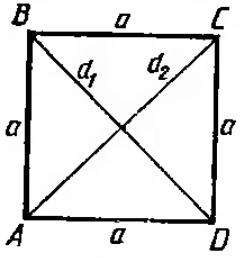
$\alpha=\gamma=90°$,
$d_1=d_2$,
$S=ab$,
$d_1^2=a^2+b^2$.

Ромб



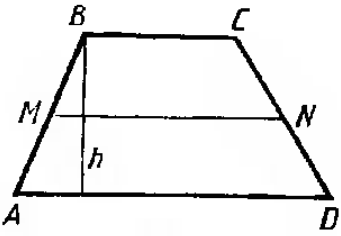
$d_1\perp d_2$,
$S=a^2\sin\alpha$,
$S=\frac{1}{2}d_1d_2$,
$d_1^2+d_2^2=4a^2$.

Квадрат



$\alpha=\gamma=90°$,
$d_1=d_2$, $d_1\perp d_2$,
$S=a^2$,
$d_1=a\sqrt{2}$.

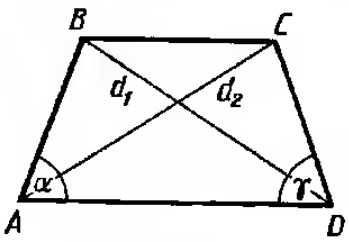
Трапеция



$MN=\frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции;

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$

Равнобокая трапеция

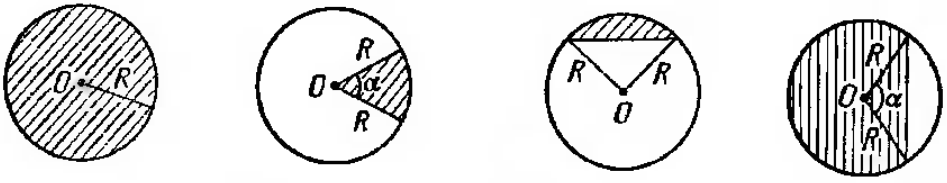


$AB=CD,$

$\alpha=\gamma,$

$d_1=d_2.$

IV. Окружность и круг



R — *радиус окружности (круга),*

$C=2\pi R$ — *длина окружности,*

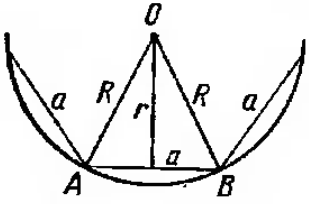
$l=\frac{\pi r\,\alpha}{180}$ — *длина дуги,*

$S=\pi R^2$ — *площадь круга,*

$S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2\,\alpha}{360}$ — *площадь кругового сектора,*

$S_{\text{сегм}}=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_{\triangle}$ — *площадь кругового сегмента.*

V. Правильные многоугольники



$$S=\frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^\circ}{n},$$

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},\qquad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Вид правильного многоугольника	α	R	r	Сумма углов
Треугольник	60°	$\frac{a\sqrt{8}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	180°
Четырехугольник	90°	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	360°
Шестиугольник	120°	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	720°

VI. Объемы и площади поверхностей тел

Наклонная призма

1. Объем наклониой призмы

$$V = S_{\text{пс}}\, a,$$

где $S_{\text{п с}}$ — площадь перпендикулярного сечеиия наклонной призмы, a — боковое ребро.

Площадь боковой поверхности наклонной призмы

$$S_{\text{б}} = P_{\text{п с}}\, a,$$

где $P_{\text{п с}}$ — периметр перпендикулярного сечения наклонной призмы, a — боковое ребро.

Площадь полной поверхностн наклонной призмы

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{б}}$ — площадь боковой поверхности наклонной призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь ее основания.

Прямая призма

Объем прямой призмы

$$V = S_{\text{осн}}\, a,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания прямой призмы, a — боковое ребро.

Площадь боковой поверхности прямой призмы

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}}\, a,$$

где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания прямой призмы, a — боковое ребро.

Площадь полной поверхности прямой призмы

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{б}}$ — площадь боковой поверхности прямой призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания.

Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда

$$S_б=2c\,(a+b),$$

где a, b — стороны основания, c — боковое ребро прямоугольного параллелепипеда.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда

$$S_п=2\,(ab+bc+ac),$$

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

$$V=a^3,\ S_б=4a^2,\ S_п=6a^2,$$

где a — ребро куба.

Пирамида

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания пирамиды, H — высота.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды

$$S_п=S_б+S_{осн},$$

гда $S_б$ — площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{осн}$ — площадь основания.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_б=\frac{1}{2}P_{осн}\,l,$$

где $P_{осн}$ — периметр основания правильной пирамиды, l — ее апофема.

Усеченная пирамида

Объем усеченной пирамиды

$$V=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}),$$

где S_1, S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, а H — ее высота.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды

$$S_п = S_б + S_1 + S_2,$$

где $S_б$ — площадь боковой поверхности пирамиды, S_1, S_2 — площади оснований.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

$$S_б = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l,$$

где P_1, P_2 — периметры оснований, а l — ее апофема.

Цилиндр

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания цилиндра, а H — его высота.

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_б = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, H — его высота.

Площадь полной поверхности цилиндра

$$S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

где R — радиус основания цилиндра, H — его высота.

Конус

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания конуса, H — его высота.

Площадь боковой поверхности конуса

$$S_б = \pi R \cdot L,$$

где R — радиус основания конуса, L — его образующая.

Площадь полной поверхности конуса

$$S_п = \pi R (R + L),$$

где R — радиус основания конуса, а L — его образующая.

Усеченный конус

Объем усеченного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi H\,(R^2+Rr+r^2),$$

где R, r — радиусы оснований усеченного конуса, H — его высота.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S_б=\pi L\,(R+r),$$

где R, r — радиусы оснований усеченного конуса, L — его образующая.

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$$S_п=\pi L\,(R+r)+\pi R^2+\pi r^2,$$

где R, r — радиусы оснований усеченного конуса, L — его образующая.

Сфера и шар

Объем шара

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара.

Площадь сферы (площадь поверхности шара)

$$S=4\pi R^2,$$

где R — радиус сферы.

Объем шарового сегмента

$$V=\pi H^2\,(R-\frac{1}{3}H),$$

где H — высота шарового сегмента, R — радиус шара.

Объем шарового сектора

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot H,$$

где H — высота соответствующего шарового сегмента, R — раднус шара.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина
— — вектора 379
— — числа 36
Абсцисса 351
Аксиома 257
Алгебраическая форма комплексного числа 49
Амплитуда колебания 114
Аналитическое задание
— — функции 71
— — числовой последовательности 202
Апофема
— правильной пирамиды 332
— — — усеченной 332
Аргумент 71
— вспомогательный 157
Асимптота
— вертикальная 215
— горизонтальная 211

Бином Ньютона 61
Биссектриса
— треугольника 275
— угла 265
Боковые стороны
— — равнобедренного треугольника 279
— — трапеции 294

Вектор 379
— единичный 382
— нулевой 380
Векторы
— коллинеарные 383
— одинаково направленные 379
— противоположно направленные 379
— равные 379
Вершина
— конуса 336
— ломаной 296
— многогранника 328
— многоугольника 297
— параболы 108
— пирамиды 331
— треугольника 275
— угла 263
— — многогранного 327
— — трехгранного 327
— четырехугольника 290
Вершины
— четырехугольника противоположные 290
— — соседние 290
Вращение 370
Выделение полного квадрата 103

Вынесение множителя
— — из-под знака корня 63
— — общего за скобку 58
Выражение
— алгебраическое 53
— — дробное 53
— — иррациональное 53, 68
— — рациональное 53
— — целое 53
— сопряженное 70
— трансцендентное 116
— тригонометрическое 121
— числовое 12
Высота
— конуса 336
— параллелограмма 292
— пирамиды 331
— призмы 329
— трапеции 295

— треугольника 275
Вычитаемое 12
Вычитание
— дробей десятичных 24
— — обыкновенных 21
— — рациональных 64
— комплексных чисел 50

Геометрические фигуры
— — основные в пространстве 314
— — — на плоскости 256
Геометрический смысл производной 224
Геометрическое место точек
— — — в пространстве 342
— — — на плоскости 288
Геометрия 255
— Лобачевского 270
— евклидова 255
Гипербола 83
Гипотенуза 280
Гомотетия 367
Градус 264
Градусная мера
— — дуги 267
— — угла 264
Граница
— круга 262
— области 327
Грань
— многогранника 328
— угла двугранного 327
— — многогранного 327
— — трехгранного 327
График
— гармонического колебания 114
— обратной пропорциональности 33
— прямой пропорциональности 79
— уравнения с двумя переменными 163
— функции 74
— — квадратичной 107
— — линейной 80
— — логарифмической 94
— — нечетной 76
— — обратной 93
— — показательной 90
— — постоянной 78
— — степенной 85
— — тригонометрической 98
— — четной 76
Графическое решение
— — неравенства с одной переменной 179
— — — — — — второй степени 185
— — системы уравнений 169
— — уравнения с одной переменной 153

Движение 369
Действительная часть комплексного числа 49
Деление
— дробей десятичных 25
— — обыкновенных 21
— — рациональных 85
— комплексных чисел 50
— с остатком 12
Делимое 12
Делитель 12
— общий 15
— — наибольший 15
— числа 12
Десятичное приближение числа
— — — по избытку 44
— — — — недостатку 44
Диагональ
— многоугольника 297
— параллелограмма 291
— призмы 329
— прямоугольника 293
— ромба 293
— четырехугольника 290
Диагональное сечение призмы 329
Диаметр
— круга 262
— окружности 262
— шара 338
Диаметральная плоскость 339
Диаметрально противоположные точки шара 338
Дискриминант квадратного уравнения 133

Дифференцирование 220
— произведения 220
— сложной функции 221
— суммы 220
— частного 220
Длина
— дуги 801
— ломаной 296
— окружности 801
— отрезка 259
Додекаэдр 333
Доказательство 257
— неравенств 199
Дополнительные
— лучи 261
— множители 20
— полупрямые 261
Допустимые значения переменной 53
Достаточное условие экстремума 229
Дробная часть числа 39
Дробь
— десятичная 22
— — бесконечная 27
— — — периодическая 23
— — — — смешанная 23
— — — — чистая 28
— неправильная 18
— несократимая 19
— обыкновенная 17
— правильная 18
— рациональная 63
Дуга окружности 267

Единица измерения
— объема 344
— площади 308

Звено ломаной 296
Знак
— интеграла 247
— неравенства нестрогого 33
— — строгого 33
— приближенного равенства 43
Знаменатель
— геометрической прогрессии 205
— дроби 17
— общий обыкновенных дробей 19
— — — — наименьший 20
— — рациональных дробей 63
Значащие цифры 24
Значение
— алгебраического выражения 54
— буквы 17
— производной функции в точке 219
— функции 71
— — наибольшее 231
— — наименьшее 231
— числового выражения 12

Избавление от иррациональности в знаменателе 70
Извлечение квадратного корня из натурального числа 45
Измерения прямоугольного параллелепипеда 330
Икосаэдр 333
Интеграл 247
Интервал 35
Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными 170

Касательная
— к графику фуикции 223
— к окружности 274
— к шаровой поверхности 339
— плоскость конуса 336
— — цилиндра 335
— — шара 339
Касание окружностей
— — внешнее 274
— — внутреннее 274
Катет 280
Квадрат 293
Квадратный трехчлен 60
Колебания
— гармонические 114
— синусоидальные 114
Комплексный нуль 48
Композиция движений 371
Конец вектора 379
Концы отрезка 259
Конус 336
— прямой 336
— усеченный 337

Координата точки на прямой 30
Координатные
— векторы 382
— четверти 352
Координаты
— вектора 380
— декартовы в пространстве 352
— — на плоскости 351
— середины отрезка 354
— точки в пространстве 353
— — на плоскости 351
Корень
— арифметический 40
— квадратного трехчлена 60
— — уравнения 131
— квадратный 41
— многочлена 60
— нечетной степени из отрицательного числа 41
— посторонний для уравнения 137
— уравнения 131
Косинус
— острого угла 302
— угла 96
— числа 96
Котангенс
— угла 96
— числа 96
Коэффициент
— гомотетии 368
— одночлена 55
— подобия 374
— при переменной 163
— пропорциональности 79
— — обратной 82
Крайний член пропорции 38
Кратное 12
— общее 16
— — наименьшее 16
Критическая точка 229
Круг 262
Круговой
— сегмент 313
— сектор 312
Куб 330

Линейка 284
Логарифм 117
— десятичный 120
— натуральный 95
— произведения 117
— степени 118
— частного 117
Логарифмирование 119
Логарифмируемое число 117
Ломаная 296
— замкнутая 296
— простая 296
Луч 35, 261
— открытый 35

Максимум 228
Мантисса десятичного логарифма 121
Медиана треугольника 275
Метод
— доказательства от противного 258
— — неравенства 199
— — — оценки знака разности 199
— промежутков 189
— решения системы уравнений 166
— — — — введения новых переменных 167
— — — — подстановки 166
— — — — сложения 166
— — — — умножения и деления 171
— — уравнения 142
— — — введения новой переменной 142
— — — возведения в степень 147
— — — графический 159
— — — разложения на множители 141
Минимум 228
Мнимая единица 49
— часть комплексного числа 49
Многогранник 328
— выпуклый 328
— правильный 333
Многоугольник 297
— вписанный в окружность 299
— выпуклый 298
— описанный около окружности 299
— плоский 297
— правильный 298

Многочлен 56
— второй степени 60
— первой степени 60
— третьей степени 60
— n-й степени 60
Множители 11
— дополнительные 63
Модуль
— вектора 379
— числа 36

Наклонная 273, 324
Направление координатной прямой 31
Начало
— вектора 379
— координат 73, 353
— луча 261
Начальная
— точка полупрямой 261
— фаза колебания 114
Необходимое условие экстремума 229
Неравенство
— Коши 199
— с переменной 178
— — — второй степени 183
— — — дробно-линейное 132
— — — иррациональное 193
— — — линейное 179
— — — логарифмическое 191
— — — показательное 191
— — — с модулями 187
— — — тригонометрическое 195
— треугольника 276
— числовое 33

Область 326
— значений функции 71
— многоугольная 298
— определения алгебраического выражения 53
— — уравнения 139
— — функции 71
Образующая
— конуса 336
— цилиндра 334
Объем
— конуса 347
— — усеченного 347
— куба 345
— пирамиды 345
— призмы 345
— прямоугольного параллелепипеда 345
— тела вращения 348
— цилиндра 346
— шара 343
— шарового сегмента 343
— — сектора 348
Одночлен 55
Окрестность точки 208
Окружность 262
— вписанная в треугольник 288
— описанная около треугольника 282
Октаэдр 333
Определение 257
Ордината 351
Орты 382
Осевое сечение
— — конуса 336
— — цилиндра 335
Оси координат 351, 353
Основание
— конуса 836
— логарифма 117
— наклонной 273, 324
— перпендикуляра 273, 323
— пирамиды 331
— — усеченной 331
— призмы 329
— равнобедренного треугольника 279
— степени 15, 39
— трапеции 294
— цилиндра 334
Основное свойство
— — дроби обыкновенной 18
— — — рациональной 62
— — первообразной 243
Остаток 12
Ось
— абсцисс 73, 351
— вращения 371
— конуса 336
— ординат 73, 351
— симметрии параболы 108

— — фигуры 376
— цилиндра 335
Отрезок 259
— направленный 378
— не пересекающийся с прямой 263
— пересекающийся с прямой 263

Парабола 74
— кубическая 84
Параллелепипед 330
— прямоугольный 330
Параллелограмм 291
Параллельность прямой и плоскости 318
Параллельный перенос
— — в пространстве 377
— — на плоскости 377
Параметр 160
Первообразная 243
Перемена знаков у членов дроби 62
Переменная 17
— зависимая 71
— независимая 71
Переместительное свойство
— — сложение 11, 38
— — умножения 11, 38
Период
— бесконечной десятичной периодической дроби 28
— функции 77
— — осиовной 77
Перпендикуляр 273, 323
— общий двух скрещивающихся прямых 318
— серединный 273
Пирамида 331
— вписанная в конус 337
— описанная около конуса 337
— правильная 332
— усеченная 332
— — правильная 332
Планиметрия 255
Плоскости
— координатные 353
— параллельные 319
— пересекающиеся 316
— перпендикулярные 325
Плоскость 314
— координатная 73
— симметрии фигуры 367
— числовая 73
Площадь
— боковой поверхности конуса 350
— — — пирамиды 349
— — — призмы 343
— — — цилиндра 350
— квадрата 309
— круга 312
— кругового сегмента 313
— — сектора 312
— параллелограмма 309
— поверхности тела вращения 350
— полной поверхности конуса 350
— — — пирамиды 349
— — — призмы 348
— — — цилиндра 350
— простой фигуры 308
— прямоугольника 309
— ромба 309
— трапеции 310
— треугольника 310
Поверхность тела 327
Поворот 370
Погрешность
— абсолютная 48
— относительная 43
Подкоренное число 40
Подобные
— одночлены 56
— треугольники 376
— фигуры 375
Показатель
— корня 40
— степени 15, 39
Полуинтервал 35
Полуось
— отрицательная 351
— положительная 351
Полуплоскость 263
Полупрямая 261
Полупрямые
— дополнительные 261
— одинаково направленные 379
— противоположно направленные 379

Порядок
— арифметических действий 12
— числа 41
Последовательность числовая 202
— — возрастающая 202
— — постоянная 203
— — убывающая 203
Построения на плоскости 285
Потенцирование 119
Правила вычисления интегралов 243
— — первообразных 244
Правило
— параллелепипеда 332
— параллелограмма 381
— треугольника 331
Предел
— интегрирования верхний 247
— — нижний 247
— функции 213
— — в точке 214
— числовой последовательности 207
Преобразование
— подобия 374
— рациональных выражений 67
— тождественное 55
— фигур 364
Приближенное значение числа 43
Приведение
— дробей к общему знаменателю 19, 63
— подобных членов 56
Призма 328
— вписанная в цилиндр 335
— наклонная 330
— описанная около цилиндра 335
— правильная 330
— прямая 329
Признак
— параллелограмма 291
— параллельности двух плоскостей 319
— — прямой и плоскости 313
— — прямых 272
— перпендикулярности плоскостей 325
— — прямой и плоскости 321
Признаки делимости 13
— равенства треугольников 273
— — —прямоугольных 261
Приращение
— аргумента 218
— функции 218
Прогрессия
— арифметическая 203
— геометрическая 205
Проекция
— наклонной 273, 324
— прямой на плоскость 323
Произведение
— вектора и числа 383
— одночленов 55
— чисел 11
— — комплексных 48
Производная 219
— вторая 223
Пропорциональность
— обратная 82
— прямая 78
Пропорция 38
Простейшие задачи на построение 285
Процент 26
Прямая 256
— координатная 30
— перпендикулярная плоскости 321
— числовая 33
Прямоугольник 293
Прямые
— параллельные 268
— пересекающиеся 257
— перпендикулярные 272
— скрещивающиеся 317

Равносильные
— неравенства 178
— системы уравнений 165
— уравнения 131
Равные
— векторы 379
— дроби 18
— комплексные числа 48
— отрезки 277
— треугольники 277
— углы 277
— фигуры 372

Раднан 301
Радианная мера угла 301
Радиус
— круга 262
— начальный 95
— окружности 262
— — цилиндра 335
— шара 338
Разложение на множители
— — — квадратного трехчлена 60
— — — многочлена 58
— — — натурального числа 14
Разность
— арифметической прогрессии 203
— векторов 381
— чисел 12
— — комплексных 48
Распределительное свойство умножения относительно сложения 11, 38
Расстояние
— между параллельными прямыми 273
— — скрещивающимися прямыми 313
— — точками 259, 354
— — — координатной прямой 37
— от прямой до параллельной ей плоскости 324
— — точки до плоскости 323
— — — — прямой 273
Растяжение графика 105
Ребро
— боковое пирамиды 331
— — призмы 329
— многогранника 323
— угла двугранного 327
— — многогранного 327
— — трехгранного 327
Рекуррентный способ задания числовой последовательности 202
Решение
— неравенства с двумя переменными 196
— — — одной переменной 178
— системы неравенств 180
— — уравнений 164
— совокупности неравенств 132
— треугольников 307
— уравнений с двумя переменными 163
— — — одной переменной 131
Ромб 293
Свободный член
— — многочлена 60
— — уравнения 133
Свойства
— арифметических действий 11, 38
— — корней 41
— логарифмов 117
— модулей 36
— прогрессии арифметической 204
— — геометрической 206
— степеней с показателями действительными 47
— — — — натуральными 39
— — — — рациональными 42
— числовых неравенств 34
Свойство
— измерения отрезков 259
— — углов 264
— откладывания отрезков 261
— — углов 265
— параллельных прямых 289
— плоскостей в пространстве 315
— принадлежности точек и прямых на плоскости 256
— расположения точек на прямой 259
— существования равных треугольников 273
Секущая 271
Сжатие графика 105
Симметрия
— относительно плоскости 367
— — прямой 365
— — точки 364
Синус
— острого угла 302
— угла 96
— числа 96
Система
— неравенств 180, 196
— уравнений 138
Скалярное произведение векторов

— — — в пространстве 385
— — — на плоскости 384
Скорость изменения функции в точке 222
Слагаемые 11
Следствие уравнения 137
Сложение
— векторов 380
— дробей десятичных 24
— — обыкновенных 20
— — рациональных 64
— комплексных чисел 50
Совокупность
— двух систем уравнений 168
— неравенств с одной переменной 181
— уравнений 136
Сокращение
— дробей обыкновенных 19
— — рациональных 63
Соответственные значения выражений 54
Сочетательное свойство
— — сложения 11, 38
— — умножения 11, 38
Способ группировки 59
Среднее
— арифметическое двух чисел 199
— геометрическое двух чисел 199
— пропорциональное 304
Средний член пропорции 38
Средняя линия
— — трапеции 295
— — треугольника 276
Стандартный вид
— — многочлена 56
— — одночлена 55
— — положительного числа 40
Старший член многочлена 60
Степень 15, 39
— многочлена 60
— одночлена 55
— с показателем дробным 42
— — — иррациональным 47
— — — натуральным 15
— — — нулевым 39
— — — отрицательным целым 39
— — — рациональным 42
Стереометрия 255
Сторона
— многоугольника 297
— треугольника 275
— угла 263
— четырехугольника 290
Сумма
— бесконечной геометрической прогрессии 210
— векторов 380
— интегральная 246
— чисел 11
— — комплексных 48
Сфера 339

Табличное задание функции 73
Тангенс
— острого угла 302
— угла 96
— числа 96
Тело 327
— вращения 327
— простое 327
Теорема 257
— Виета 134
— косинусов 305
— о двух перпендикулярах 321
— — делимости произведения 13
— — — суммы 13
— — пределах 209
— — трех перпендикулярах 324
— Пифагора 281
— синусов 305
— Фалеса 270
Тетраэдр 332
Тождественно равные выражения 54
Тождество 54
Точка 256
— внутренняя 326
— граничная 327
— касания окружностей 275
— — плоскости и сферы 339
— лежит между двумя точками 259
— не принадлежит плоскости 315
— — — прямой 257
— пересечения прямых 257

— принадлежит плоскости 315
— — прямой 256
— симметричная точке относительно прямой 365
— — — — точки 364
Транзитивность 35
Транспортир 264, 284
Трапеция 294
— криволинейная 250
— равнобокая 295
Треугольник 275
— вписанный в окружность 263
— описанный около окружности 283
— прямоугольный 260
— равнобедренный 278
— равносторонний 278

Угловой коэффициент
— — касательной 224
— — прямой 81, 357
Углы
— вертикальные 267
— внутренние накрест лежащие 271
— — односторонние 271
— равные 277
— смежные 266
Угол 263
— внешний треугольника 279
— внутренний треугольника 280
— вписанный в окружность 269
— вращения 371
— выпуклого многоугольника 298
— — четырехугольника 291
— двугранный 327
— линейный двугранного угла 327
— между двумя векторами 360
— — плоскостями 320
— — прямой и плоскостью 322
— — прямыми на плоскости 257
— — — скрещивающимися 313
— многогранный 327
— острый 284
— плоский 265
— поворота 370
— прямой 264
— развернутый 263
— трехгранный 327
— тупой 264
— центральный 267
Угольник 284
Уменьшаемое 12
Умножение
— вектора на число 382
— дробей десятичных 24
— — обыкновенных 21
— — рациональных 65
— комплексных чисел 50
— одночленов 55
Уравнение
— биквадратное 143
— дробное 138
— иррациональное 147
— касательной к графику 225
— квадратное 138
— — неполное 184
— — неприведенное 133
— — приведенное 133
— линейное с двумя переменными 163
— — — одной переменной 132
— логарифмическое 149
— окружности 356
— плоскости 361
— показательное 149
— прямой 357
— рациональное 141
— с двумя переменными 163
— — одной переменной 131
— — параметром 160
— — переменной в знаменателе 136
— сферы 361
— тригонометрическое 152
— фигуры в пространстве 360
— — на плоскости 355
— целое 138
Условие постоянства функции 237

Фигура
— геометрическая 255
— симметричная относительно плоскости 367
— — — прямой 366
— центрально-симметричная 365
Фигуры

— гомотетичные 368
— основные геометрические 256, 314
— подобные 375
— равные 372
Физический смысл
— — производной 222
— — — второй 223
Формула
— Герона 310
— Ньютона — Лейбница 248
— n-го члена арифметической прогрессии 204
— — — геометрической прогрессии 206
— расстояния между двумя точками в пространстве 355
— — — — — координатной плоскости 354
— суммы бесконечной геометрической прогрессии 210
— — n членов арифметической прогрессии 204
— — — — геометрической прогрессии 206
Формулы
— двойного аргумента 125
— дифференцирования 220
— понижения степени 126
— преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 127
— приведения 123
— связывающие тригонометрические функции одного аргумента 123
— сложения и вычитания аргументов 121
— сокращенного умножения 57
Функция 71
— возрастающая 77
— дифференцируемая в точке 219
— квадратичная 107
— линейная 30
— логарифмическая 98
— монотонная 78
— непрерывная в точке 215
— — на интервале 215
— — — отрезке 215
— нечетная 75
— обратимая 92
— обратная 92
— периодическая 77
— подынтегральная 247
— показательная 90
— постоянная 78
— сложная 222
— степенная с показателем дробным отрицательным 88
— — — — — положительным 33
— — — — натуральным 84
— — — — целым отрицательным 35
— тригонометрическая 96
— убывающая 77
— четная 75

Характеристика десятичного логарифма 121
Характеристическое свойство
— — арифметической прогрессии 204
— — геометрической прогрессии 206
Хорда 262

Целая часть числа 39
Центр
— гомотетии 367
— круга 262
— окружности 262
— симметрии параллелепипеда 330
— — фигуры 365
— шара 333
Циркуль 284
Цилиндр 333
— прямой 334

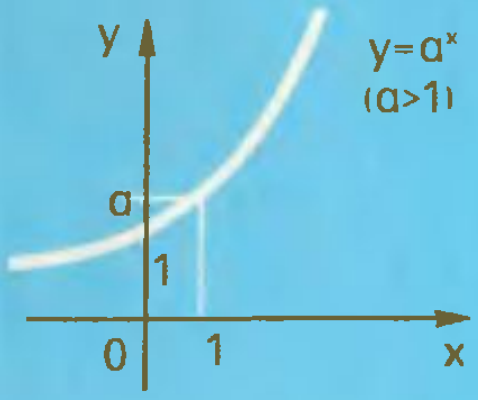
Частное 12
— от деления комплексных чисел 49
Частота колебания 114
Четырехугольник 290
— выпуклый 291
— невыпуклый 291
Числа
— взаимно простые 15
— действительные 32
— иррациональные 31
— комплексно-сопряженные 51

— комплексные 48
— мнимые 50
— натуральные 11
— отрицательные 31
— положительные 30
— простые 14
— противоположные 30
— рациональные 31
— смешанные 18
— составные 14
— целые 31
— чисто мнимые 50
Числитель дроби 17
Числовой
— луч 36
— промежуток 36
Член числовой последовательности 202

Шар 337
Шаровой
— сегмент 339
— сектор 340
— слой 339

Экстремумы 229

ГРАФИК ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ



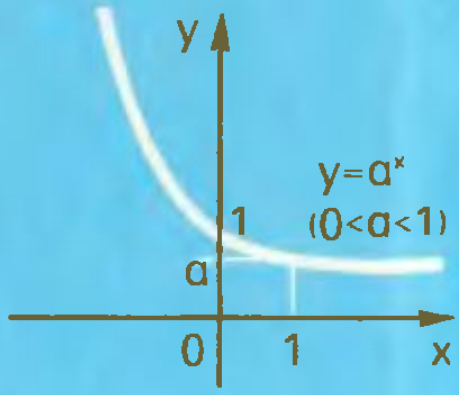
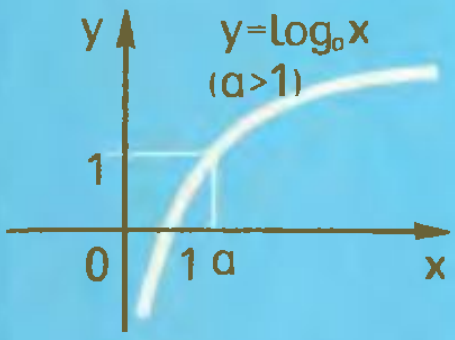
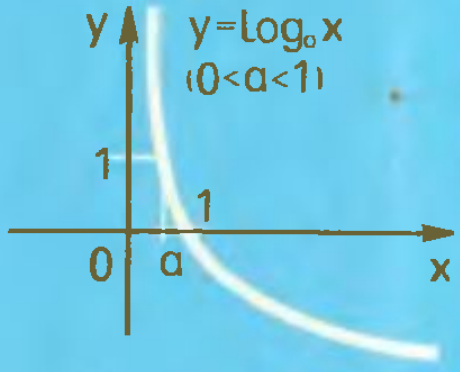
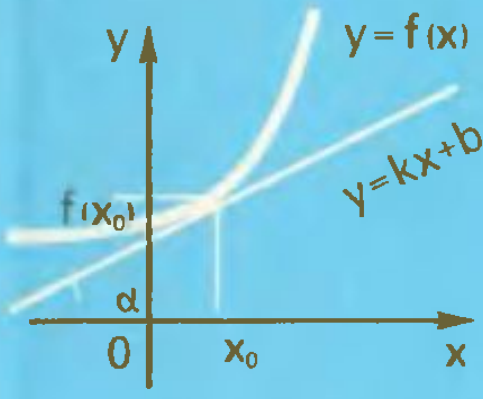


ГРАФИК ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ



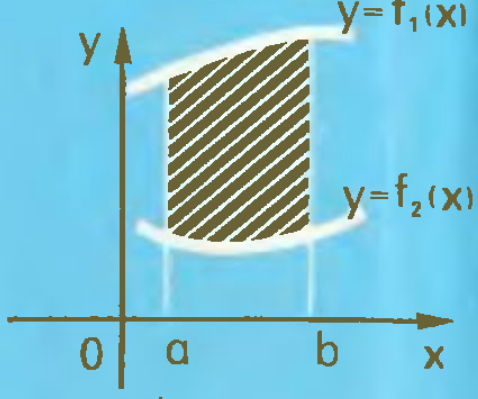


ПРОИЗВОДНАЯ



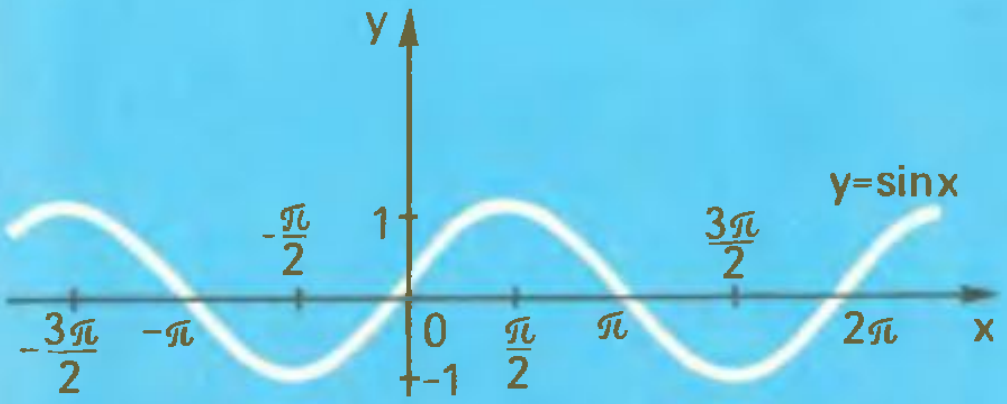
$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

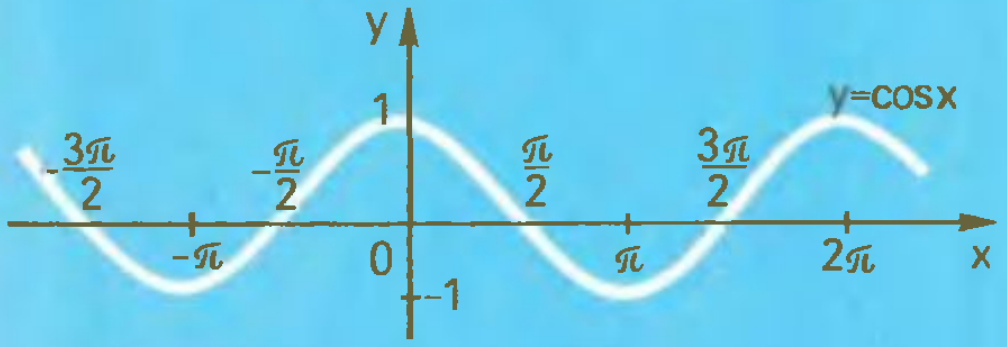
ИНТЕГРАЛ

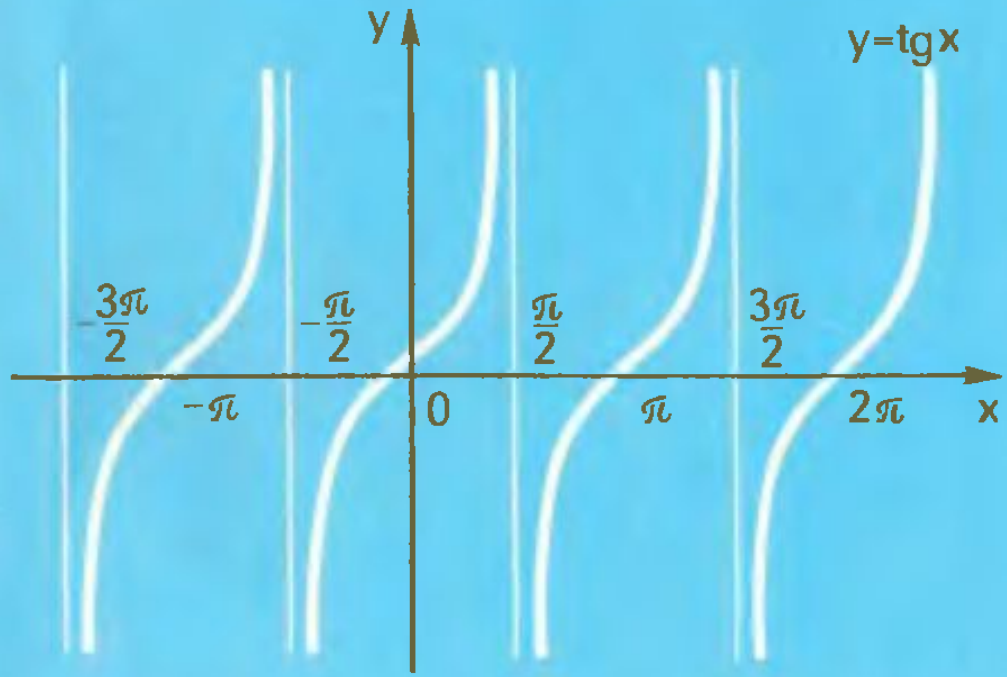


$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ







ТРЕУГОЛЬНИКИ

ОСТРОУГОЛЬНЫЙ

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ

ТУПОУГОЛЬНЫЙ

РАВНОБЕДРЕННЫЙ

РАВНОСТОРОННИЙ

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ВЫПУКЛЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

ПРЯМОУГОЛЬНИК

РОМБ

КВАДРАТ

ТРАПЕЦИЯ

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

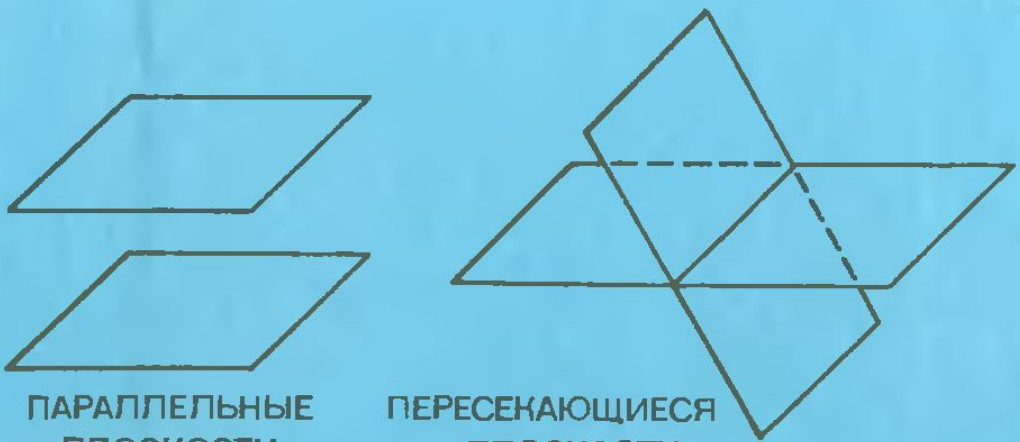
ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

ПРЯМАЯ ЛЕЖИТ В ПЛОСКОСТИ

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ